Geometria clàssica

Sebastià Xambó i Descamps

Aquest capítol conté un promptuari de conceptes bàsics de geometria elemental (seccions 1 i 2) i una col·lecció de problemes (secció 3). També conté una mostra de solucions, que presentem en dues modalitats: d'una manera convencional a la secció 5 i amb forma de diàleg a la secció 4. La raó d'incloure aquesta modalitat està en el fet que ens permet introduir, d'una manera directa i breu, qüestions relatives a la resolució de problemes que poden ser útils a alguns lectors.

Al lector més interessat en la resolució de problemes de geometria clàssica, li hem de recomanar que comenci a treballar directament la llista de problemes, i que retorni a la matèria del capítol (o a algun dels textos indicats a les referències) només quan ho consideri necessari.

En canvi, al lector més motivat per completar els seus coneixements geomètrics bàsics (una necessitat que, per altra banda, pot ser més general del que el nivell de la nostra exposició podria fer pensar, sobretot atenent al tractament de la geometria que es dóna a primària i secundària), li hem de recomanar que estudiï primer les seccions 1 i 2, fins al punt d'omplir tots els detalls de les demostracions que s'ometen, o de les demostracions de les quals només es donen les pinzellades principals, i de resoldre satisfactòriament els exercicis intercalats.

Per contrast amb un estudi sistemàtic de la geometria, en el qual els sistemes geomètrics més importants s'erigeixen sistemàticament a partir d'axiomes convenients, en aquesta exposició pressuposem un coneixement intuïtiu de les nocions i els enunciats més primitius de la geometria euclidiana plana, com ara els relatius a punts, rectes, angles i circumferències. Evitem així prolixes disquisicions, relatives a la construcció i anàlisi metòdica d'aquests conceptes i enunciats, que no aportarien gaire res als propòsits del capítol i que, en tot cas, s'estudien en cursos específics de geometria.

El signe [$\diamond$] al final d'una afirmació significa que es considera que la prova d'aquesta és fàcil o rutinària, però potser no totalment immediata, i per tant es recomana que el lector la comprovi efectivament abans de prosseguir la lectura.

1 Triangles i circumferències

El fet que moltes figures es puguin estudiar relacionant-les amb triangles, com ara quan admeten una triangulació, fa que el triangle s'hagi de considerar com una figura fonamental, i és per aquesta raó que se li dedica un espai considerable en els textos de geometria clàssica. Per altra banda, l'estudi del triangle ha estat inseparable del de la circumferència, bàsicament a causa del fet que tot triangle determina una única circumferència en la qual és inscrit (*circumferència circumscrita*). Com a objecte d'aquesta secció ens hem proposat, doncs, fer una revisió d'algunes de les propietats bàsiques del triangle i d'algunes de les relacions més remarcables entre triangles i circumferències.

Propietats bàsiques del triangle

Si ABC és un triangle, posarem a, b, c per indicar els costats oposats a A, B, C, respectivament. Els angles corresponents als vèrtexs es denotaran $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, o α, β, γ; són els angles oposats als costats a, b, c, respectivament. L'altura corresponent al vèrtex A es denotarà h_A o h_a (i, anàlogament, h_B o h_b per al vèrtex B, i h_C o h_c per al vèrtex C). Amb les notacions AB i $[AB]$ indiquem, respectivament, la recta que uneix els punts A i B i el segment (tancat) d'extrems A i B. El corresponent segment obert serà denotat (AB). La longitud del segment $[AB]$ serà denotada AB si pel context no hi ha perill que es pugui confondre amb la recta que uneix A i B; en cas contrari, la denotarem $|AB|$ o $\overline{AB}$.

Igualtat de triangles

Un *desplaçament* és una transformació dels punts del pla que conserva les distàncies (vegeu el subapartat «Desplaçaments», pàg. 170). Dos triangles ABC i $A'B'C'$ es diuen *iguals*, o *congruents*, quan hi ha un desplaçament φ tal que $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ i $\varphi(C) = C'$. Per als tres criteris d'igualtat que segueixen, vegeu la figura 0.1.

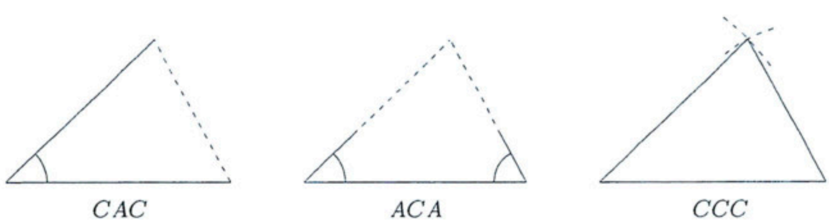

Figura 0.1: *Criteris d'igualtat de triangles*

Criteri CAC. Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, dos costats i l'angle que formen. En particular, dos triangles rectangles són iguals quan els corresponents catets són iguals.

Criteri ACA. Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, un costat i els seus dos angles contigus. En particular, dos triangles rectangles són iguals si tenen iguals un catet i el corresponent angle agut.

Criteri CCC. Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, els tres costats.

Suma dels angles d'un triangle

La suma dels tres angles de qualsevol triangle és π (figura 0.2).

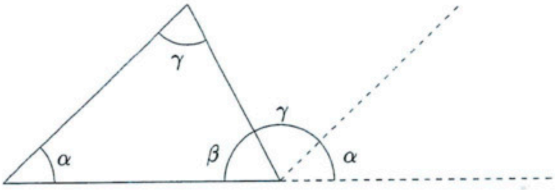

Figura 0.2: *Suma dels angles d'un triangle*

E. 1. Proveu que l'altura sobre el major dels costats d'un triangle és interior al triangle i inferior a les altres dues altures.

E. 2. Sigui P el punt a l'interior d'un quadrat $ABCD$ tal que $\widehat{PCD} = \widehat{PDC} = 15°$. Demostreu que el triangle ABP és equilàter (indicació: formeu un triangle BCP' congruent amb CDP i amb P' interior al quadrat).

Desigualtat triangular

En un triangle cada costat és inferior a la suma dels altres dos.

E. 3. Donat un punt P a l'interior d'un triangle ABC, demostreu que $AP+BP < AC+BC$.

Àrea d'un triangle

S'obté com la meitat del producte d'un costat (base) per la corresponent altura (per exemple, àrea $= \frac{1}{2}ah_A$, on h_A denota l'altura corresponent al vèrtex A). També és igual a la meitat del producte de dos costats pel sinus de l'angle que formen (per exemple, $h_A = b\sin(\gamma)$ i, per tant, àrea $= \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$). Obervem que si movem un vèrtex sobre la paral·lela a la base oposada, els triangles resultants tenen tots la mateixa àrea.

E. 4. Donat un quadrilàter convex $ABCD$, demostreu que la seva àrea és igual a $\frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin(\alpha)$, on α és un qualsevol dels dos angles que formen les *diagonals* AC i BD.

E. 5 (Teorema de Ceva). Sigui ABC un triangle i X, Y i Z punts dels segments oberts (BC), (CA) i (AB), respectivament. Demostreu que les rectes AX, BY i CZ són concurrents si i només si

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

(si AX, BY i CZ són concurrents en el punt P, proveu que BX/XC és igual al quocient de les àrees dels triangles APB i APC).

D'una recta que uneix un vèrtex A d'un triangle amb un punt del costat oposat $[BC]$, se'n diu una *ceviana* del triangle respecte del vèrtex A.

Teorema de Pitàgores

En un triangle rectangle, el quadrat de la hipotenusa és la suma dels quadrats dels catets. Per a una demostració, vegeu l'exercici que segueix.

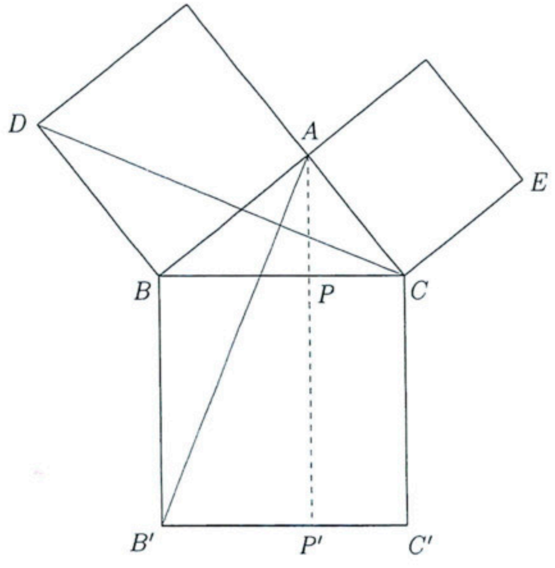

Figura 0.3: *Teorema de Pitàgores*

E. 6. Amb les notacions de la figura 0.3, mostreu que si el triangle ABC és rectangle, amb A l'angle recte, i AP és l'altura corresponent al vèrtex A, llavors l'àrea del quadrat AD és igual a l'àrea del rectangle $BPP'B'$. Deduïu-ne el teorema del catet (vegeu l'epígraf «Teorema del catet», pàg. 175) i el teorema de Pitàgores.

Teorema del cosinus

En un triangle de costats a, b, c, es compleix que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha),$$

on α és l'angle oposat al costat a (aquest enunciat es dedueix fàcilment a partir del teorema de Pitàgores aplicat als triangles APC i BPC, on P és el peu de l'altura de C).

E.7. Si dos triangles tenen dos parells de costats respectivament iguals i els corresponents angles desiguals, llavors entre els costats oposats a aquests angles hi ha la mateixa relació de desigualtat.

Teorema del sinus

En un triangle de costats a, b i c, i angles α, β i γ, es compleix que

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Aquesta propietat surt directament de les definicions: si h és l'altura del vèrtex C d'un triangle ABC, llavors $h = a\sin(\beta) = b\sin(\alpha)$, d'on resulta la primera de les igualtats. Aplicant el mateix raonament als costats b i c, s'obté la segona igualtat. El valor comú dels quocients $a/\sin(\alpha)$, $b/\sin(\beta)$ i $c/\sin(\gamma)$ serà determinat al subapartat «Radi de la circumferència circumscrita», pàg. (179).

E.8. Sigui ABC un triangle i suposem que β' i γ' són angles tals que $\alpha + \beta' + \gamma' = \pi$ i $b/\sin(\beta') = c/\sin(\gamma')$. Demostreu que $\beta' = \beta$ i $\gamma' = \gamma$.

Longitud de les mitjanes

Les *mitjanes* d'un triangle són les rectes que uneixen els seus vèrtexs amb els punts mitjans dels costats oposats corresponents.

Si M és el punt mitjà del costat AB i $m = CM$, on ABC és un triangle donat, aplicant el teorema del cosinus als triangles MAC i MBC, i sumant i restant les dues relacions que s'obtenen, s'arriba fàcilment a les dues relacions següents:

$$a^2 + b^2 = 2(\frac{c^2}{4} + m^2),\ a^2 - b^2 = 2cd,$$

on d és la distància de M al peu P de l'altura del vèrtex C i on hem suposat $a \geqslant b$.

La primera de les relacions anteriors ens permet trobar la mitjana m en funció dels costats a, b, c:

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

E.9. Si en un triangle dues mitjanes són iguals, llavors el triangle és isòsceles.

E. 10. Siguin A i B dos punts, M el seu punt mitjà, $c = AB$ i $k \geqslant c^2/2$ un nombre real. Proveu que la circumferència de centre M i radi $\sqrt{k/2 - c^2/4}$ coincideix amb el lloc geomètric dels punts tals que la suma dels quadrats de les seves distàncies a A i a B és igual a k.

E. 11. Amb les mateixes notacions i hipòtesis que en l'exercici anterior, proveu que el lloc geomètric dels punts tals que la diferència dels quadrats de les seves distàncies a B i a A és igual k, coincideix amb la recta perpendicular a AB pel punt del segment $[AM]$ que és a la distància $k/(2c)$ de M.

Alguns punts associats a un triangle

En cada triangle es poden considerar diversos punts que tenen, cada un d'ells, una relació geomètrica remarcable amb el triangle. En aquest apartat considerarem el circumcentre, l'ortocentre, l'incentre i els excentres. Més endavant n'estudiarem d'altres.

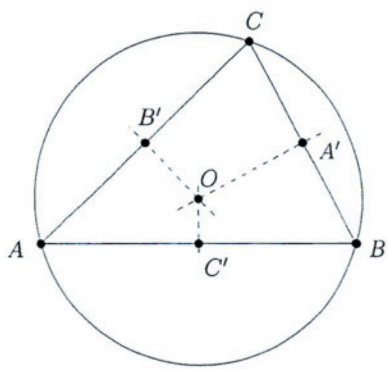

Figura 0.4: *Circumcentre*

Circumcentre

Les mediatrius dels costats d'un triangle ABC es tallen en un punt, O, anomenat *circumcentre* del triangle (la *mediatriu* d'un segment és la recta perpendicular pel seu punt mitjà; els seus punts són precisament els que equidisten dels extrems del segment). Així, doncs, el punt O equidista dels tres vèrtexs i és, per tant, el centre de l'única circumferència que passa per ells. Aquesta circumferència s'anomena *circumferència circumscrita* del triangle ABC. També ens hi referim dient que és «la circumferència ABC» (figura 0.4).

Ortocentre i triangle òrtic

Les altures d'un triangle es tallen en un punt, H, anomenat *ortocentre* del triangle (figura 0.5).

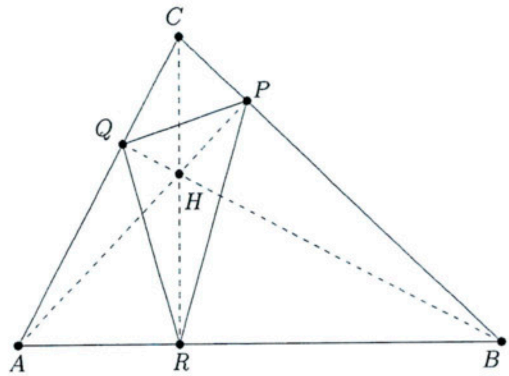

Figura 0.5: *Ortocentre i triangle òrtic*

Aquesta propietat és una senzilla conseqüència de l'exercici que segueix. El triangle PQR els vèrtexs del qual són els peus de les altures d'un triangle donat ABC s'anomena *triangle òrtic* de ABC.

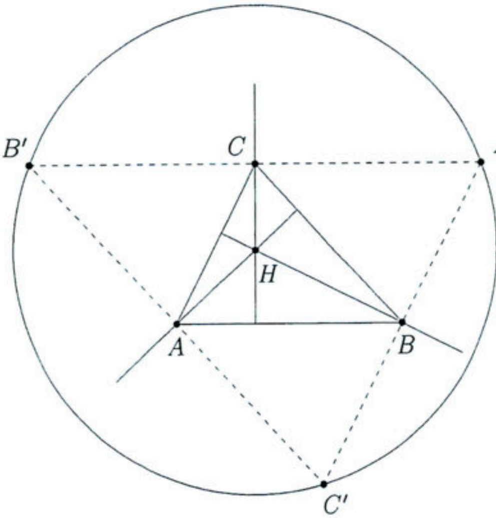

Figura 0.6: *Circumcentre $A'B'C'$ = ortocentre ABC*

E. 12. Proveu que les altures d'un triangle són les mediatrius del triangle els costats del qual són les paral·leles pels vèrtexs del primer triangle als corresponents costats oposats (figura 0.6).

Incentre

Les bisectrius dels angles d'un triangle es tallen en un punt, I, anomenat *incentre* del triangle (figura 0.7).

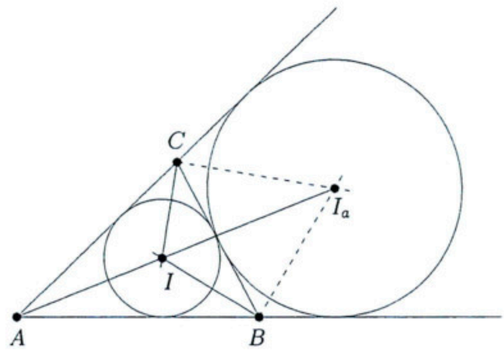

Figura 0.7: *Incentre i excentre*

La *bisectriu* d'un angle és la recta que el divideix en dos angles iguals; els seus punts són precisament els que equidisten dels dos costats de l'angle. Així, doncs, el punt I equidista dels tres costats i és, per tant, el centre de la *circumferència inscrita* al triangle, és a dir, la circumferència que és tangent als tres costats.

Excentres

Les bisectrius exteriors de dos angles B i C d'un triangle es tallen en un punt I_a que equidista de les perllongacions dels dos costats (c i b) del tercer angle A i del costat a oposat a A. Per tant, la bisectriu de A també passa per I_a, i així I_a és el centre d'una circumferència que és tangent al costat a del triangle i a les perllongacions de b i c (vegeu la figura 0.7). Es diu que el punt I_a és l'*excentre* del triangle relatiu al costat a. Els excentres I_b i I_c es defineixen anàlogament. Del fet que la bisectriu i la bisectriu exterior d'un angle d'un triangle siguin perpendiculars [$\diamond$], se'n dedueix sense dificultat que les bisectrius d'un triangle són les altures del triangle $I_aI_bI_c$.

Circumferències i angles

La relació que hi ha entre un angle i una circumferència té propietats i aplicacions remarcables. Aquesta secció en conté una mostra.

Angle inscrit en una circumferència

Un angle inscrit en una circumferència (és a dir, un angle el vèrtex del qual està sobre la circumferència) és la meitat de l'angle central corresponent a l'arc comprès per aquell. És clar, doncs, que el valor de l'angle només depèn de l'arc que comprèn i no de la posició del seu vèrtex sobre la circumferència (figura 0.8).

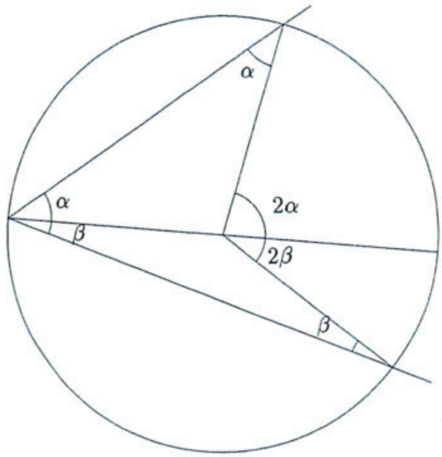

Figura 0.8: *Angles inscrits en una circumferència*

E. 13. Dos triangles rectangles amb la mateixa hipotenusa tenen la mateixa circumferència circumscrita. A més, el centre d'aquesta circumferència és el punt mitjà de la hipotenusa compartida.

E. 14. Donat un triangle ABC, siguin $P, V \in [BC]$ el peu de l'altura de A i el punt d'intersecció de la bisectriu de $\widehat{A}$ amb BC. Siguin D i E els peus de les perpendiculars a AB i AC per P i V, respectivament. Demostreu que si $\alpha = \widehat{A}/2$, llavors $\widehat{DPB} = \widehat{EPC} = \alpha$.

Un angle inscrit en una circumferència és recte quan l'arc que comprèn és una semicircumferència (vegeu la figura 0.9.a). Aquesta propietat es pot usar per trobar les tangents a una circumferència C des d'un punt P exterior: són (figura 0.9.b) les rectes que uneixen P amb els punts d'intersecció de C amb la circumferència que té per diàmetre el segment OP, on O és el centre de C.

Angle interior i angle exterior

Un angle el vèrtex del qual és exterior a una circumferència i els dos costats del qual la tallen (s'admet també que un costat de l'angle, o els dos, siguin tangents), és la semidiferència dels dos angles centrals corresponents als dos arcs de la circumferència determinats per l'angle.

Aquesta propietat és una conseqüència immediata del fet que un angle interior x d'un triangle és, amb les notacions de la figura 0.10.a, la diferència dels angles α i β.

Anàlogament, un angle, el vèrtex del qual és interior a una circumferència, és la semisuma dels angles centrals corresponents als dos arcs determinats per l'angle (figura 0.10.b).

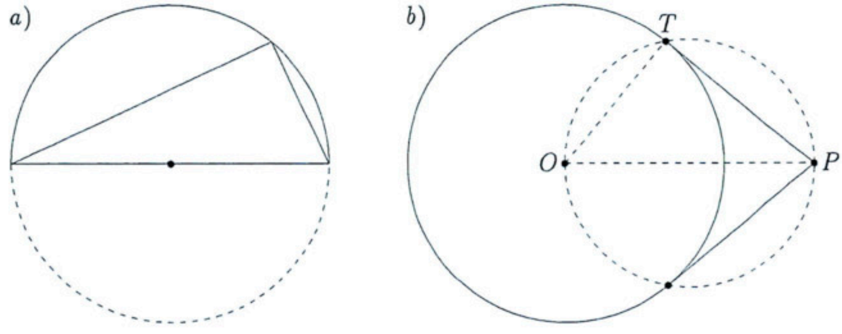

Figura 0.9: *a) Angle recte inscrit. b) Tangents des d'un punt a una circumferència*

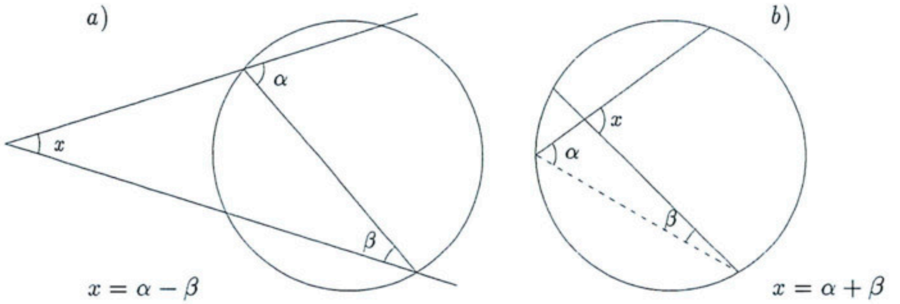

Figura 0.10: *Angles exterior i interior a una circumferència*

Arc capaç

Donat un segment AB i un angle α, el lloc geomètric dels punts P d'un dels semiplans definits per AB i tals que $\widehat{APB} = \alpha$, és un arc de circumferència els extrems del qual són A i B (d'aquest arc, se'n diu que és l'*arc capaç* de l'angle α respecte del segment AB). Vegem com es pot construir.

Suposem primer que $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Sobre la mediatriu de AB (vegeu la figura 0.11), i en el semiplà en qüestió (a la figura 0.11 suposem que és el semiplà per sobre de AB), considerem el punt O tal que $\widehat{AOM} = \alpha$, on M és el punt mitjà de AB. Llavors, els punts P de la circumferència de centre O i radi OA que pertanyen a l'esmentat semiplà són precisament els que compleixen $\widehat{APB} = \alpha$ i formen, amb les notacions de la figura 0.11, l'arc APB. Si ara ens fixem que l'arc $AP'B$ és el capaç de $\pi - \alpha$ respecte de AB en el semiplà oposat, esdevé també clar com podem construir l'arc capaç d'un angle $\beta \in (\pi, 2\pi]$.

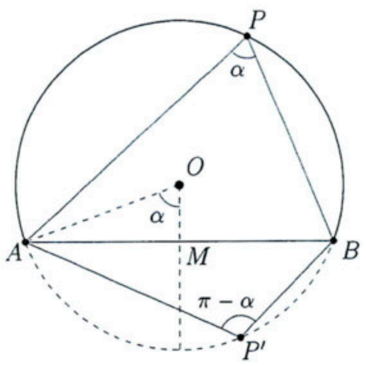

Figura 0.11: *Arc capaç d'un angle respecte d'un segment*

E. 15. A la figura 0.12, un vaixell situat al punt P ignora les coordenades d'aquesta posició, però mitjançant un mapa pot obtenir les dels punts A, B i C situats a la costa i mitjançant un goniòmetre pot determinar els angles α i β. Podeu obtenir les coordenades de P, sabent que $A = (6,5)$, $B = (10,28)$, $C = (43,48)$, $\alpha = 1,04754$ rad i $\beta = 0,53791$ rad?

Criteri CAA

Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, un costat, un angle contigu a aquest costat i l'angle oposat. En particular, dos triangles rectangles són iguals si tenen iguals les hipotenuses i un angle agut. Aquestes afirmacions es poden obtenir aplicant el subapartat anterior. En particular, la construcció d'un triangle, del qual coneixem un costat, un dels seus angles contigus i l'angle oposat, es pot fer fàcilment construint l'arc capaç de l'angle oposat.

2 Semblances

En la geometria clàssica, les idees relacionades amb la noció de semblança de figures hi tenen un paper important. Per les necessitats d'aquest capítol, els enunciats més útils són els següents *criteris de semblança de triangles*:

Criteri CAC. Dos triangles són semblants si tenen un angle igual i els corresponents costats proporcionals.

Criteri AA. Dos triangles són semblants si tenen iguals dos angles corresponents.

Criteri CCC. Dos triangles són semblants si els corresponents costats són proporcionals.

El lector que no tingui dubtes sobre el significat d'aquests criteris, pot ometre l'apartat que segueix i continuar la lectura a l'apartat «Semblances i geometria del triangle».

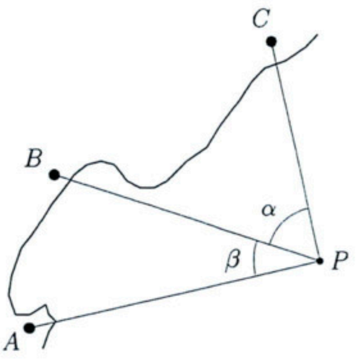

Figura 0.12: *Un vaixell determina la seva posició*

Generalitats

En aquest apartat exposem breument els conceptes i enunciats més rellevants relatius a les semblances. Primer considerem els desplaçaments. Després el teorema de Tales, que és l'eina essencial per a l'estudi de les homotècies, i tot seguit les semblances en general. Finalment, revisem les relacions que hi ha entre el producte dels nombres complexos i les semblances.

Desplaçaments

Un *desplaçament* del pla és una transformació que conserva les distàncies. Els desplaçaments conserven els angles. Un desplaçament es diu *directe* si conserva l'orientació del pla; altrament, es diu *invers*. Les translacions i els girs són exemples de desplaçaments directes. Donats dos punts P i P', posarem $t_{PP'}$ per denotar l'única translació que transforma P en P'. Donats un punt O i un angle α, el gir de centre O i amplitud α serà denotat $g_{O,\alpha}$.

Les simetries són exemples de desplaçaments inversos. La *simetria* respecte de la recta ℓ serà denotada s_ℓ: és la transformació $P \mapsto P'$ tal que P' és el simètric de P respecte de ℓ. La recta ℓ s'anomena *eix* de la simetria.

Es pot veure que els punts fixos d'un desplaçament directe el classifiquen, en el sentit següent: si no té punts fixos, és una translació; si té exactament un punt fix, és un gir; si té més d'un punt fix és la identitat. Pel que fa als desplaçaments inversos, hi ha dos casos: si té punts fixos, es tracta d'una simetria; altrament, és la composició ts_ℓ d'una simetria s_ℓ amb una translació t en la direcció de l'eix ℓ (es parla d'una *simetria amb lliscament*).

E. 16. Siguin s i s' les simetries respecte de les rectes ℓ i ℓ'. Per estudiar quin desplaçament és la composició $s's$, sigui α l'angle format per ℓ i ℓ' i posem O per denotar el punt d'intersecció de ℓ i ℓ' quan $\alpha \neq 0$, i d per denotar la distància entre ℓ i ℓ' quan $\alpha = 0$ (rectes paral·leles). Demostreu que $s's$ és el gir de centre O i amplitud 2α si $\alpha \neq 0$, i la translació de magnitud $2d$ segons la direcció perpendicular de ℓ a ℓ' si $\alpha = 0$. Noteu que $s's$ es la identitat si $\ell = \ell'$.

E. 17. Sigui ABC un triangle i construïm quadrats $ACES$ i $BCDT$ com a la figura 0.13. Demostreu que el punt M d'intersecció de l'altura h_C amb ED és el punt mitjà del segment ED.

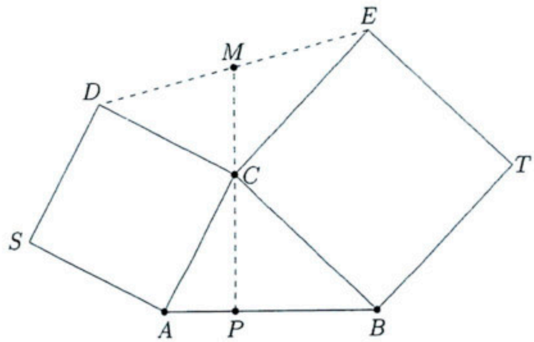

Figura 0.13: *L'altura de C passa pel punt mitjà de DE*

Teorema de Tales

Si dues rectes són tallades per un sistema de rectes paral·leles, els segments així obtinguts sobre una de les rectes són proporcionals als corresponents segments obtinguts sobre l'altra (figura 0.14).

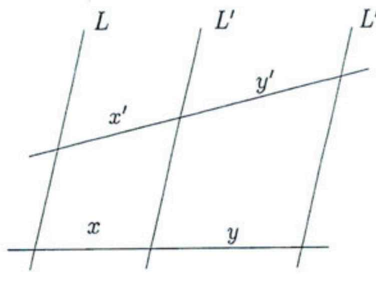

Figura 0.14: *Teorema de Tales:* $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \cdots$

E. 18. Si a la figura 0.14 les rectes L i L' són paral·leles i $x/x' = y/y'$, llavors L'' també és paral·lela a L.

E. 19 (Teorema de Menelau). Sigui ABC un triangle i X, Y i Z punts sobre les rectes BC, CA i AB, respectivament. Demostreu que X, Y i Z estan alineats si i només si

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1;$$

convenim que un quocient com ara BX/CX és positiu o negatiu segons que X sigui exterior o interior al segment $[BC]$ (indicació: si X, Y i Z estan sobre una recta L i d_A, d_B i d_C indiquen les distàncies de A, B i C a L, respectivament, amb el convenció que aquestes distàncies es compten com a positives a un costat de L i com a negatives a l'altre, llavors es compleix la relació $BX/CX = d_B/d_C$, i les anàlogues per Y i Z).

Homotècies

L'*homotècia de centre O* (un punt) *i mòdul* o *raó k* (un nombre real no nul) és la transformació $A \mapsto A'$ tal que $O' = O$ i, si $A \neq O$, A' és el punt de la recta OA tal que $OA'/OA = k$ (aquí fem el convenció que A' és de la semirecta OA si $k > 0$ i de la semirecta oposada a OA si $k < 0$). Els enunciats que segueixen es proven fàcilment emprant el teorema de Tales i l'exercici E.18.

La transformació d'una recta per una homotècia és una recta paral·lela a la primera. Val un enunciat anàleg per segments. D'aquí en resulta que angles homòlegs per una homotècia són iguals.

Les rectes pel centre d'homotècia són fixes, i són les úniques rectes fixes si $k \neq 1$ (si $k = 1$, l'homotècia és la identitat).

Segments homòlegs per una homotècia són proporcionals segons el valor absolut $|k|$ de la raó d'homotècia. D'aquí resulta que la transformació de la circumferència de centre P i radi r per l'homotècia h de raó k és la circumferència de centre $h(P)$ i radi $|k|r$.

E.20. Dos triangles no congruents són homotètics si els costats d'un són paral·lels als corresponents costats de l'altre.

E.21. Dues circumferències sempre són homotètiques i els seus centres estan alineats amb el centre de qualsevol homotècia que transformi l'una en l'altra.

Figures semblants

Dues figures són semblants si una es pot obtenir de l'altra mitjançant la composició d'una homotècia i un desplaçament. Una semblança transforma rectes en rectes i segments en segments. Segments homòlegs són proporcionals i angles homòlegs són iguals. Una semblança es diu *directa* o *inversa* segons que conservi l'orientació del pla o la inverteixi.

E.22. Proveu els criteris de semblança de triangles enunciats al principi d'aquesta secció.

Raó àuria. Donat un segment de longitud $a > 0$, el seu *segment auri* és el segment de longitud $x > 0$ tal que $a/x = x/(a - x)$. Com que aquesta relació és equivalent a l'equació $x^2 + ax - a^2 = 0$, obtenim que $x = \rho a$, on

$$\rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

El nombre real ρ s'anomena la *raó àuria*. Com que $\rho^2 + \rho - 1 = 0$, resulta que

$$\rho^{-1} = 1 + \rho = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Un *rectangle auri* és aquell pel qual la base menor és segment auri de la base major. Això equival a dir que el rectangle és semblant al que resulta de separar-ne el quadrat de costat la base menor (figura 0.15).

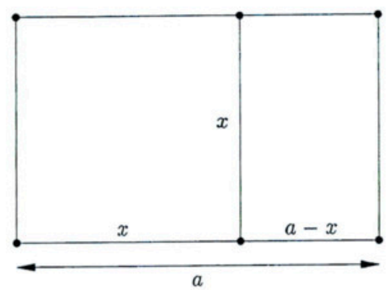

Figura 0.15: *Rectangle auri*

Semblances i nombres complexos

Si representem els punts del pla per nombres complexos, i $w = r_\alpha = r \cdot 1_\alpha$ és el nombre complex de mòdul r i argument α, llavors la transformació $z \mapsto wz$ és la composició del gir d'angle α amb centre a l'origen seguit de l'homotècia de raó r amb el mateix centre. La raó d'això és que el mòdul i l'argument d'un producte de dos nombres complexos són el producte i la suma dels mòduls i arguments dels factors, respectivament ($|wz| = |w||z|$ i $\arg(wz) = \arg(w) + \arg(w)$).

E. 23. Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles i interpretem $B - A$, $C - A$, $B' - A'$ i $C' - A'$ com a nombres complexos. Demostreu que ABC i $A'B'C'$ són directament semblants si i només si $(C' - A')/(B' - A') = (C - A)/(B - A)$.

E. 24. Siguin $A_1A_2A_3$ i $A_1'A_2'A_3'$ dos triangles directament semblants. Sigui $t \in \mathbf{R}$ fix i definim $A_i'' = A_i + t(A_i' - A_i)$, $i = 1, 2, 3$. Demostreu que els triangles $A_1A_2A_3$ i $A_1''A_2''A_3''$ són directament semblants. Val la mateixa conclusió si tenim, en lloc de triangles, figures directament semblants $A_1A_2 \ldots A_k$ i $A_1'A_2' \ldots A_k'$ i definim A_i'' com abans per $i = 1, 2, \ldots, k$ (a la figura 0.16 il·lustrem el cas en què la figura és un pentàgon regular).

En la resta d'aquesta secció presentem, agrupades en dos apartats, un nombre de situacions geomètriques en les quals les semblances són l'element decisiu per provar els enunciats.

Semblances i la geometria del triangle

Vegem tot seguit algunes de les aplicacions més bàsiques de les semblances a l'estudi de les propietats del triangle.

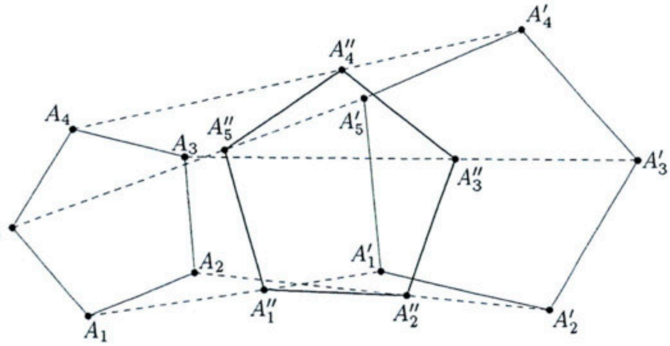

Figura 0.16: *A''_i divideix $A_iA'_i$ en la proporció 3/5*

Mitjanes i baricentre

Les tres mitjanes es tallen en un punt, G, anomenat *baricentre* del triangle. Si A és un vèrtex qualsevol i A' el punt mitjà del costat oposat a A, llavors $GA = 2GA'$ o, equivalentment, $AA' = 3GA'$ (vegeu la figura 0.17 i noteu que els triangles ABG i $A'B'G$ són semblants, pel criteri AAA de semblança, i que $A'B' = \frac{1}{2}AB$).

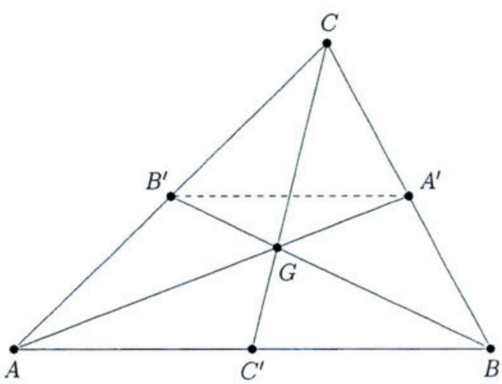

Figura 0.17: *Baricentre d'un triangle*

Teorema de l'altura

L'altura sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle és la mitjana proporcional entre els dos segments en què el peu de l'esmentada altura divideix la hipotenusa. En símbols, $CP^2 = AP \cdot BP$, on el triangle ABC se suposa rectangle en el vèrtex C i on P és el peu de l'altura del vèrtex C (vegeu la figura 0.18). En efecte, els triangles BPC i CPA són semblants, ja que tenen els tres angles iguals (recordem que dos angles són iguals si els seus corresponents costats són perpendiculars). Així, doncs, $x/h = h/(a-x)$, igualtat que equival a la relació enunciada.

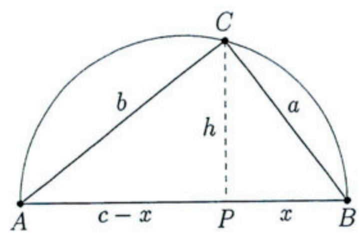

Figura 0.18: *Teoremes de l'altura i del catet*

Teorema del catet

Amb les mateixes notacions de la figura 0.18, els triangles BPC i BCA són semblants, ja que són rectangles i tenen un angle comú. Per tant, $x/a = a/c$, la qual cosa ens diu que en un triangle rectangle la longitud d'un catet, per exemple a, és la mitjana proporcional entre la hipotenusa, c, i la projecció del catet, x, sobre aquella. Per a una altra demostració, i també una interpretació, vegeu l'exercici E.6.

Així, tenint en compte el subapartat anterior, tenim que els triangles rectangles ABC, ACP i CBP són semblants. És clar, a més a més, que l'àrea de ABC és la suma de les àrees de ACP i CBP. Això ens proporciona una nova comprensió del teorema de Pitàgores: si el quocient de l'àrea del quadrat de costat AB per la del triangle ABC és k, és a dir, si $c^2 = k{\cdot}ABC$, llavors $a^2 = k{\cdot}CBP$ i $b^2 = k{\cdot}ACP$, d'on $a^2+b^2 = k(CBP+ACP) = k{\cdot}ABC = c^2$. Notem que aquest argument prova que si apliquem una mateixa construcció sobre la hipotenusa i els catets d'un triangle rectangle (suposant que la construcció proporcioni una àrea a partir d'un segment), llavors l'àrea de la figura sobre la hipotenusa és la suma de les àrees de les figures sobre els catets.

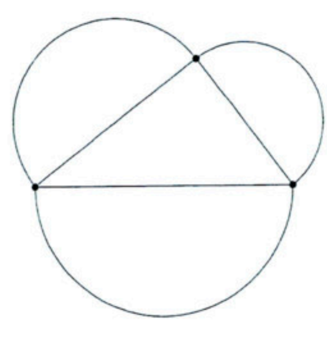

Figura 0.19: *Teorema de Pitàgores per semicercles*

Per exemple, si la construcció és la del polígon regular de $n \geqslant 3$ costats sobre un segment donat, obtenim que l'àrea del n-gon regular de costat la hipotenusa d'un triangle rectangle és la suma de les àrees dels n-gons regulars els costats dels quals són els catets. Anàlogament, tenim que l'àrea del semicercle que té per diàmetre la hipotenusa és la suma de les àrees dels semicercles que tenen per diàmetre els catets (figura 0.19).

Potència d'un punt respecte d'una circumferència

Sigui P un punt i C una circumferència que no passa per P. Considerem dues rectes per P que tallen C en els punts A i A', B i B', respectivament (figura 0.20). Aleshores els triangles PAB' i PBA' són semblants, ja que tenen dos angles iguals, i per tant $PA/PB = PB'/PA'$, o bé $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$. Així doncs, el producte $PA \cdot PA'$ és independent de la recta que prenguem per P (entre les que tallen C) i el seu valor s'anomena *potència de* P respecte de C. Prenent la recta que passa per P i pel centre de C, veiem que la potència és igual a $(d-r)(d+r) = d^2 - r^2$, on d és la distància de P al centre de C i r el radi de C.

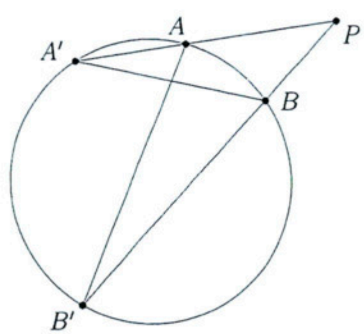

Figura 0.20: *Potència d'un punt respecte d'una circumferència*

Punts concíclics. Ara no hi ha dificultat a deduir que si A i A', B i B', són dues parelles de punts distints i les rectes AA' i BB' es tallen en un punt P, aleshores els punts A, A', B i B' són *concíclics* (això és, estan continguts en una mateixa circumferència) si i només si $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$.

Eix radical. El lloc geomètric dels punts que tenen la mateixa potència respecte de dues circumferències no concèntriques és una recta perpendicular a la que uneix els seus centres O_1 i O_2, i s'anomena *eix radical* de les dues circumferències. En efecte, siguin d_1 i d_2 les distàncies d'un punt P als centres de les dues circumferències, i siguin r_1 i r_2 els seus radis. La condició que la potència de P sigui la mateixa respecte de les dues circumferències és $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$, o bé $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Com que $\delta = r_1^2 - r_2^2$ és constant, el lloc geomètric és el dels punts P tals que $d_1^2 - d_2^2 = \delta$, que sabem que és la recta perpendicular a O_1O_2 pel punt que està a la distància $\delta/(2c)$ del punt mitjà del segment $[O_1, O_2]$, on c és la distància entre O_1 i O_2 (vegeu l'exercici E.11). És a dir, la posició del punt d'intersecció de l'eix radical amb la recta O_1O_2 és $m + (r_1^2 - r_2^2)/(2c)$.

Si les dues circumferències es tallen, l'eix radical és la recta que uneix els dos punts d'intersecció (o la tangent comuna si són tangents). En efecte, els punts d'intersecció tenen la mateixa potència ($=0$) respecte de les dues circumferències.

Centre radical. El *centre radical* de tres circumferències que no tenen els centres alineats és l'únic punt que té la mateixa potència respecte de les tres circumferències. Aquest punt és la intersecció de dos qualssevol dels eixos radicals de les tres parelles de circumferències que podem formar.

Propietats mètriques de les bisectrius

Considerem el triangle ABC de la figura 0.21.

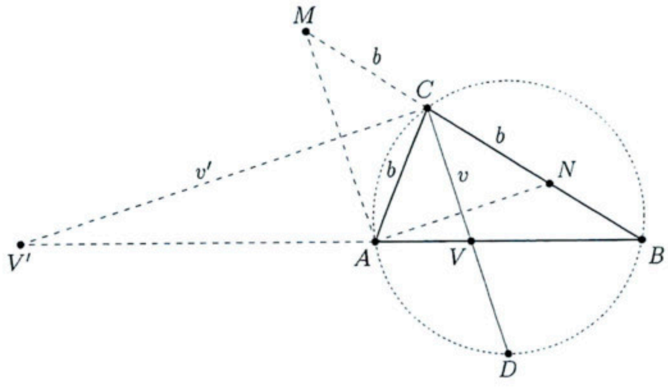

Figura 0.21: *Determinació de les bisectrius*

Sigui M el punt sobre BC, a continuació de C, tal que $CM = b$. Per construcció, el triangle ACM és isòsceles. Per tant, la bisectriu v' de $\widehat{ACM}$ és perpendicular a la base AM. Com que la bisectriu v és perpendicular a v', v és paraŀlela a AM. Aplicant el teorema de Tales, obtenim que

$$\frac{BV}{a} = \frac{VA}{b} = \frac{c}{a+b}.$$

Considerant el punt N del segment BC tal que $NC = b$, resulta que AN és paraŀlela a v', i raonant de manera similar, obtenim que

$$\frac{BV'}{a} = \frac{AV'}{b} = \frac{c}{a-b}.$$

Per altra banda, no és difícil veure que si D és el punt d'intersecció de la semirecta CV amb el cercle ABC, llavors els triangles AVC i DBC són semblants (tenen dos angles iguals: un per definició de bisectriu, l'altre pel fet de ser angles inscrits que comprenen el mateix arc BC de la circumferència ABC). En resulta que $a/v = (v + VD)/b$, o bé $ab = v^2 + v \cdot VD$. Però com que $v \cdot VD = VA \cdot VB = abc^2/(a+b)^2$, tenim que

$$v^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} = 4ab\frac{p(p-c)}{(a+b)^2}$$

on hem posat $p = (a+b+c)/2$ (el *semiperímetre* del triangle).

E. 25 (Steiner–Lehmus). Si en un triangle dues bisectrius són iguals, llavors el triangle és isòsceles.

Radi de les circumferències inscrita i exinscrita

Considerem la figura 0.22. Si posem $p = (a+b+c)/2$, aleshores es compleix que $AB' = AC' = p-a$: la primera igualtat és clara i la segona resulta del fet que $AB'+a = AB'+CA'+A'B = AB'+CA'+BC' = p$. De la mateixa manera tenim que $BA' = BC' = p-b$ i $CA' = CB' = p-c$. També tenim $AB'' = AC''$ i com que $AB'' = AC+CA''$ i $AC'' = AB+BA''$, veiem que $AB'' = AC'' = p$ [$\diamond$]. Per tant $BA'' = BC'' = p-c$ i $CB'' = CA'' = p-b$. Finalment, $C'C'' = B'B'' = AB''-AB' = p-(p-a) = a$ i $A'A'' = |BA'-BA''| = |p-b-(p-c)| = |b-c|$.

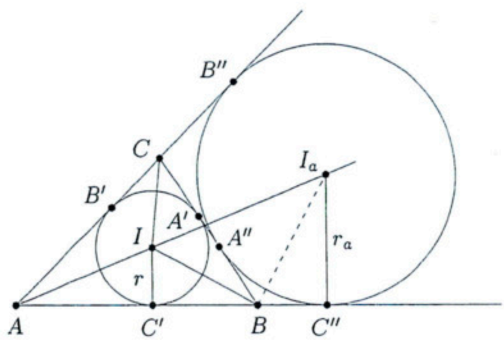

Figura 0.22: *Radi de les circumferències inscrita i exinscrita*

Atès que els triangles AIC' i AI_aC'' són semblants, serà $r/r_a = (p-a)/p$. I atès que els triangles BIC' i I_aBC'' també són semblants, $r/(p-b) = (p-c)/r_a$, o bé $rr_a = (p-b)(p-c)$. De les dues equacions obtingudes es dedueix que

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \quad r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

Els radis r_b i r_c de les altres dues circumferències exinscrites s'obtenen permutant cíclicament a, b i c en la segona de les fórmules anteriors.

Expressió de les altures en funció dels costats

Considerem la figura 0.23, en la qual N i M es defineixen de manera que estiguin alineats amb A i B, respectivament, amb $BM = BC$ i $AN = AC$. Així doncs, $NM = a+b+c = 2p$. Per les consideracions fetes al subapartat «Propietats mètriques de les bisectrius» (pàg. 177), sabem que CM (respectivament, CN) és paral·lela a la bisectriu interior IB (respectivament, IA), de manera que els triangles AIB i NCM són semblants. En resulta que $h_c/r = 2p/c$, d'on

$$h_c = 2pr/c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Canviant c per b i per a s'obtenen les fórmules que donen h_b i h_a.

D'aquestes expressions és clar que l'àrea S del triangle és donada per la fórmula d'Heron:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

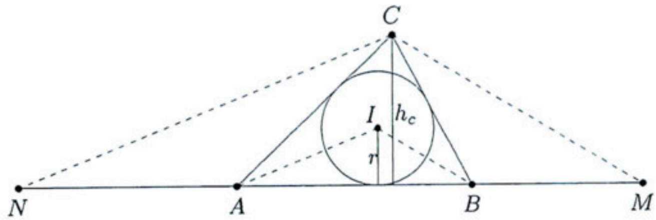

Figura 0.23: *Altures en funció dels costats*

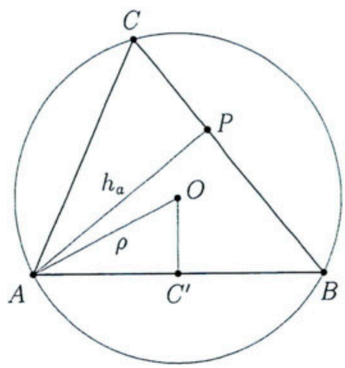

Figura 0.24: *Radi de la circumferència circumscrita*

Radi de la circumferència circumscrita

Considerem la figura 0.24. Els triangles APC i $AC'O$ són semblants: els dos són rectangles i $\widehat{AOC'}$ és la meitat de l'arc central comprès per l'angle inscrit $\widehat{ACB}$. Així, doncs, $AO/AC' = AC/AP$, o bé $\rho/(c/2) = b/h_a$. Per tant, $\rho = bc/2h_a$ i, introduint l'expressió de h_a en funció dels costats,

$$\rho = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Notem també que si $\gamma = \widehat{C}$ i $c = AB$, llavors $c/\sin(\gamma) = 2AC'/\sin(\gamma) = 2\rho$, ja que $AC'/\rho = \sin(\gamma)$. Això ens revela que el valor $a/\sin(\alpha) = b/\sin(\beta) = c/\sin(\gamma)$ (teorema dels sinus) és 2ρ, el diàmetre de la circumferència circumsrita.

Inversions

Donat un punt O i un nombre real $\rho \neq 0$, la *inversió de centre O i potència ρ*, $inv_{O,\rho}$, és l'aplicació $A \mapsto A'$ ($A \neq O$), definida per la fórmula

$$A' - O = \frac{\rho}{|OA|^2}(A - O).$$

Així A' és el punt que està sobre la recta OA, a una distància $|\rho|/|OA|$ de O, a la mateixa semirecta que A si $\rho > 0$ i a la semirecta oposada si $\rho < 0$. Atès que $|OA'| = |\rho|/|OA|$, tenim $A'' = A$ (ho expressarem dient que la $inv_{O,\rho}$ és *involutiva*).

Si $\rho > 0$ i posem $r = \sqrt{\rho}$, llavors els punts A que $inv_{O,\rho}$ deixa fixos són els de la circumferència de centre O i radi r, ja que si $|OA| = r$ llavors $\rho/|OA|^2 = 1$. En aquest cas es diu també que $inv_{O,\rho}$ és la inversió respecte de la circumferència $S = S(O, r)$ de centre O i radi r, i que A' és l'*invers* de A respecte de S. Pel que ja hem dit, també es té que A és l'invers de A' respecte de S.

Construcció. El punt A' invers de A respecte de S es pot construir de la següent manera. Suposem primer que $|OA| > r$. Si P i Q són els punts d'intersecció de la circumferència de centre A i radi $|OA|$ amb S, llavors els punts d'intersecció de les circumferències de radi r amb centres a P i Q són O i A' (figura 0.25).

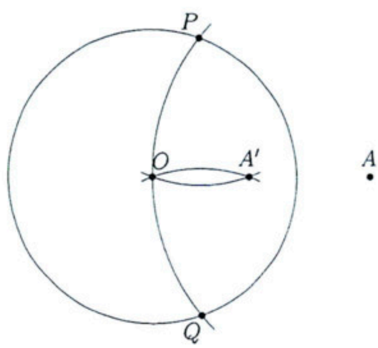

Figura 0.25: *Construcció de l'invers de A*

En efecte, els triangles AOP i OPA' són semblants, ja que per construcció són isòsceles i comparteixen l'angle del vèrtex O. Per tant, $|OA|/|OP| = |OP|/|OA'|$, que equival a $|OA| \cdot |OA'| = r^2$, on $r = |OP|$. Per construir l'invers d'un punt interior de S respecte de S, és suficient veure com podem reconstruir el punt exterior A a partir de A'. Ara bé, amb les notacions anteriors, PQ és la mediatriu de OA' i A és la intersecció de les tangents a S en els punts P i Q.

Inversió de rectes i circumferències. Una figura F' es diu inversa d'una figura F respecte de la circumferència S si quan A recorre els punts de F (diferents del centre O de S), el punt A' invers de A respecte de S recorre els punts de F' (diferents de O). Si $F' = F$, direm que la figura F és *doble* per la inversió. Per exemple, els punts dobles són els fixos per la inversió, és a dir, els punts de S; per tant, S és una circumferència doble; de la definició d'inversió, en resulta immediatament que les rectes per O són dobles.

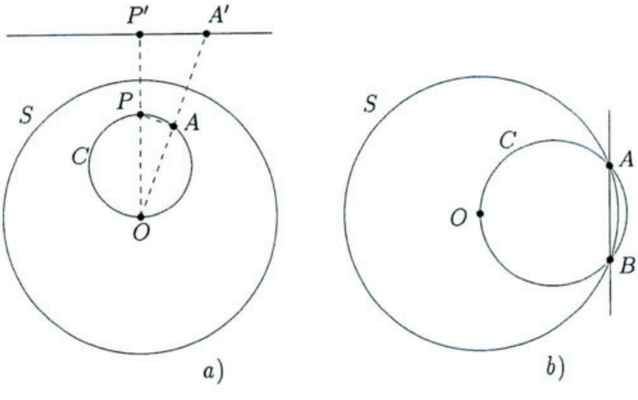

Figura 0.26: *Inversa d'una circumferència pel centre d'inversió*

Una circumferència C de diàmetre d pel centre d'inversió O (figura 0.26.a) i la recta perpendicular $P'A'$ al diàmetre OP de C a una distància $d' = r^2/d$ de O, són figures inverses (notem que OP és l'únic diàmetre de C que passa per O). En efecte, els triangles OPA i $OA'P$ són semblants, ja que són rectangles (a A i P', respectivament) i tenen un angle comú. Tenint en compte que $|OP| = d$ i $|OP'| = r^2/d$, tenim que $|OA|/d = r^2/d|OA'|$, d'on $|OA| \cdot |OA'| = r^2$. Remarquem que si $A, B \in S$ (figura 0.26.b), llavors la recta AB i la circumferència OAB són figures inverses respecte de S, ja que la inversa de la recta AB és una circumferència que passa per O i pels punts dobles A i B.

Anem a veure ara que la inversa C' d'una circumferència C que no passa pel centre d'inversió O és una circumferència. De fet, veurem que si P i Q són els extrems del diàmetre de C que passa per O, llavors C' és la circumferència de diàmetre $P'Q'$ (figura 0.27), on P' i Q' són els inversos de P i Q respecte de S.

En efecte, sigui C' la circumferència que acabem de definir. De $|OP| \cdot |OP'| = |OQ| \cdot |OQ'|$ obtenim $|OP'|/|OQ| = |OQ'|/|OP|$, valor que coincideix amb el mòdul k de l'homotècia de centre O que transforma C en C'. Sigui ara A un punt de C i determinem B i A' sobre C' com a la figura 0.27. Llavors $|OB| = k|OA|$ i $|OA'| \cdot |OB| = |OQ'| \cdot |OP'|$ (potència de O respecte de C'). Per tant,

$$|OA| \cdot |OA'| = \tfrac{1}{k}|OB| \cdot |OA'| = \tfrac{1}{k}|OQ'| \cdot |OP'| = |OP| \cdot |OP'| = r^2,$$

i això acaba la prova.

Notem que la raó, k, de l'homotècia de centre O que transforma C en C' és igual a r^2/p, on p és la potència de O respecte de C:

$$k = \frac{|OP'|}{|OQ|} = \frac{|OP| \cdot |OP'|}{|OP| \cdot |OQ|} = \frac{r^2}{p}.$$

E. 26. La recta PQ que uneix dos punts P i Q d'una circumferència C que no passa pel centre O d'una circumferència S i la recta $P'Q'$ que uneix els inversos P' i Q' de P i Q respecte de

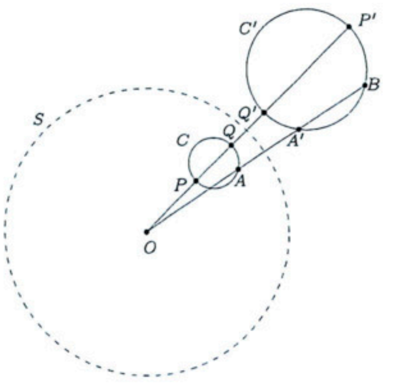

Figura 0.27: *Inversa d'una circumferència C que no passa per O*

S, o bé es tallen sobre l'eix radical de C i C', o bé aquest eix és paraŀlel a ambdues rectes (indicació: mostreu que els punts P, Q, P' i Q' estan sobre una circumferència K, amb la qual cosa el punt d'intersecció de PQ i $P'Q'$ –si es tallen– és el centre radical de C, C' i K).

E. 27. Amb les notacions del problema anterior, mostreu que la recta tangent a C en un punt P i la recta tangent a C' en el punt P' formen angles iguals amb la recta PP'. A més a més, o bé es tallen sobre l'eix radical de C i C', o bé aquest és paraŀlel a ambdues.

E. 28. Amb les notacions de la figura 0.26.a, mostreu que $\widehat{OA'P'}$ és igual a l'angle agut que OA forma amb la tangent a C pel punt A (indicació: aquest darrer angle coincideix amb l'angle agut que forma la tangent a C en el punt O amb OA).

Conservació dels angles. Els exercicis anteriors es poden usar per demostrar que les inversions conserven els angles. Per precisar més, un *arc* serà un segment (que pot ser una semirecta) o un arc de circumferència. Si dos arcs tenen el mateix origen, convindrem a mesurar l'angle que formen com el de les semirectes tangents als arcs en el vèrtex de l'angle. Com que les inversions transformen arcs en arcs, també transformen angles en angles i la propietat a què ens hem referit és que la mesura d'un angle coincideix amb la del seu transformat per una inversió. La demostració d'aquest fet es pot deixar com a exercici per al lector. Convé adonar-se, però, que el sentit del transformat d'un angle per una inversió és el contrari del de l'angle abans de transformar.

3 Problemes

Resoldre un problema, especialment un problema de geometria, és trobar un camí entre el que ens donen i el que ens demanen. Del que ens donen podem intentar *progressar* fent deduccions successives aplicant coneixements ja coneguts: és el procés de *síntesi* en el sentit dels antics grecs, i que en alguns diccionaris apareix reflectit com una de les accepcions del mot. Fixem-nos que els coneixements pertinents per avançar sovint esdevenen clars quan parem esment en les coses que ens donen.

A l'altra banda, allà on volem arribar, sovint és útil preguntar-se quina *mena de cosa* ens demanen, ja que les respostes a aquesta pregunta solen donar *claus* inequívoques sobre quins coneixements convé invocar per aconseguir-ho: és el procés d'*anàlisi* dels antics grecs.

Aquests principis, i d'altres, els podeu trobar il·lustrats a la mostra de solucions, presentades en forma dialogada, a la secció 4.

Una advertiment: l'ordre en el qual donem els problemes no pressuposa cap graduació progressiva de la seva dificultat.

GE 1. Amb les notacions de la figura 0.28, calculeu l'àrea del quadrat interior en funció de t.

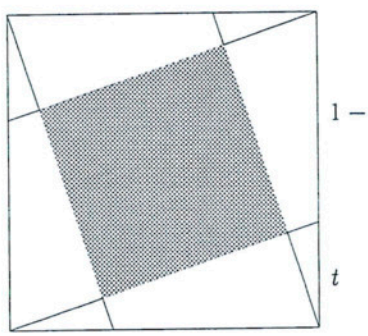

Figura 0.28: *Es demana l'àrea del quadrat gris en funció de t*

GE 2. Donada una corda a d'una circumferència C de radi 1 i centre O, considereu la circumferència C' determinada imposant que a en sigui un diàmetre. Si P és el punt de C' més allunyat de O, quin és el valor màxim de la distància PO?

GE 3. L'angle $\widehat{A}$ d'un triangle isòsceles ABC és igual a $2/5$ d'un angle recte i $\widehat{B} = \widehat{C}$. La bisectriu de l'angle $\widehat{C}$ talla el costat oposat en el punt D. Calculeu les valors dels angles del triangle BCD. Expresseu la longitud, a, del costat BC en funció de la longitud, b, del costat AC.

GE 4. Sigui ABC un triangle isòsceles amb $\widehat{B} = \widehat{C} = 80^o$. Siguin $D \in (A, B)$ i $E \in (A, C)$ els punts tals que $\widehat{BCD} = 50^o$ i $\widehat{CBE} = 60^o$. Quants graus té l'angle $\widehat{BED}$?

GE 5 (Construcció de Descartes de segments auris). A la figura 0.29, la circumferència és tangent a AB al punt B i el seu diàmetre és igual a AB. Demostreu que AB és el segment auri de AD i que AC és el segment auri de AB.

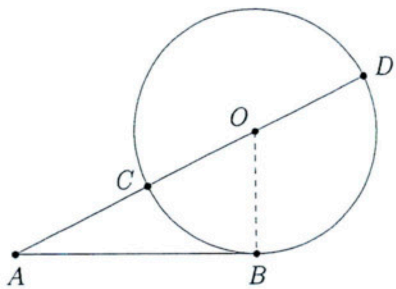

Figura 0.29: *Una construcció geomètrica de segments auris*

GE 6. Proveu que en un pentàgon regular el costat és segment auri de la diagonal.

GE 7. Donat un punt P interior a un triangle ABC, siguin X, Y i Z els peus de les perpendiculars des de P als costats BC, CA i AB, respectivament (es diu que XYZ és el *triangle pedal* del punt P relatiu al triangle ABC). Proveu que

$$YZ = \frac{a}{2\rho}PA, \quad ZX = \frac{b}{2\rho}PB, \quad XY = \frac{c}{2\rho}PC,$$

on ρ és el radi de la circumferència circumscrita al triangle.

GE 8. En un triangle acutangle ABC, la bisectriu interior de l'angle $\widehat{A}$ talla el costat BC en el punt K i el cercle circumscrit en el punt M. Siguin L i N els peus de les perpendiculars per K a AB i AC, respectivament. Demostreu que el quadrilàter $ALMN$ i el triangle ABC tenen la mateixa àrea.

GE 9. En cada un dels vèrtexs d'un quadrat, el costat del qual fa un quilòmetre, hi ha una casa, i les quatre cases volen fer camins amb els que es puguin comunicar les unes amb les altres. Què poden fer, si només disposen de materials per construir $1 + \sqrt{3}$ km de camí?

GE 10. Proveu que els tres angles d'un triangle ABC són aguts si i només si existeixen punts A', B' i C' de l'interior dels costats BC, AC i AB, respectivament, tals que els segments AA', BB' i CC' tenen la mateixa longitud.

GE 11. Demostreu que qualsevol polígon convex d'àrea 1 està contingut en un rectangle d'àrea no superior a 2.

GE 12 (Teorema de Morley). Donat un triangle ABC, construïm el triangle PQR tal com indica la figura 0.30. Demostreu que

$$|QR| = 8\rho \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma),$$

on ρ és el radi de la circumferència circumscrita a ABC. Notem que la simetria de la relació obtinguda mostra que el triangle PQR és equilàter, fet que és conegut com a *teorema de Morley*.

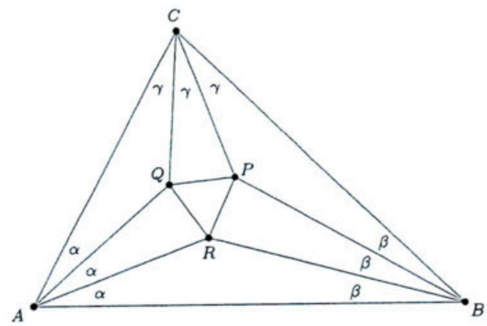

Figura 0.30: *Teorema de Morley: PQR és equilàter*

GE 13. Sigui ABC un triangle i P un punt tal que $PA = 7$, $PB = 5$ i $PC = 3$. Demostreu que si ABC té, amb aquestes condicions, perímetre màxim, llavors P és l'incentre de ABC.

GE 14. Siguin P, Q, R i S els centres dels quadrats construïts externament sobre els quatre costats d'un rombe. Demostreu que $PQRS$ és un quadrat. Si fixem el centre, el costat i l'orientació del rombe, i deixem que l'angle entre dos costats contigus variï, quin lloc geomètric descriu el punt P?

GE 15. Proveu que un quadrilàter convex és circumscriptible a una circumferència si i només si les sumes dels dos parells de costats oposats són iguals.

GE 16. Demostreu que la suma de les distàncies d'un punt interior a un triangle als tres vèrtexs és superior a la meitat del perímetre i inferior al perímetre.

GE 17. Sigui $2p$ el perímetre d'un triangle i μ la suma de les seves tres mitjanes. Demostreu que

$$\frac{3p}{2} < \mu < 2p\,.$$

GE 18. Demostreu que un quadrilàter convex és inscriptible en una circumferència (és a dir, que existeix una circumferència que passa pels seus vèrtexs) si i només si té dos angles oposats suplementaris.

GE 19. Proveu que les altures d'un triangle són les bisectrius del seu triangle òrtic (vegeu la figura 0.5). Resulta, així, que l'ortocentre d'un triangle coincideix amb l'incentre del seu triangle òrtic.

GE 20 (Cercle d'Euler). Demostreu que els punts mitjans dels costats d'un triangle (figura 0.31) i els peus de les seves altures estan sobre un cercle.

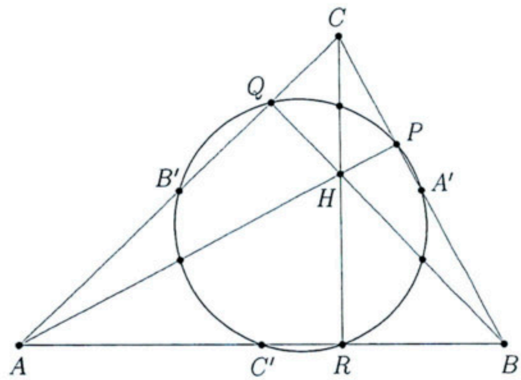

Figura 0.31: *Cercle d'Euler, o dels nou punts*

GE 21. El cercle d'Euler d'un triangle també passa pels punts mitjans dels segments que uneixen els vèrtexs d'un triangle amb l'ortocentre (per aquesta raó el cercle d'Euler s'anomena també *cercle dels nou punts* del triangle; figura 0.31).

GE 22. Sigui P un punt, ABC un triangle i X, Y, Z els peus de les perpendiculars per P als costats BC, CA i AB, respectivament. Demostreu que X, Y i Z estan alineats si i només si P està sobre la circumferència circumscrita de ABC (en aquest cas, la recta que conté els punts X, Y i Z s'anomena *recta de Simson* de P relativa al triangle ABC; vegeu la figura 0.32).

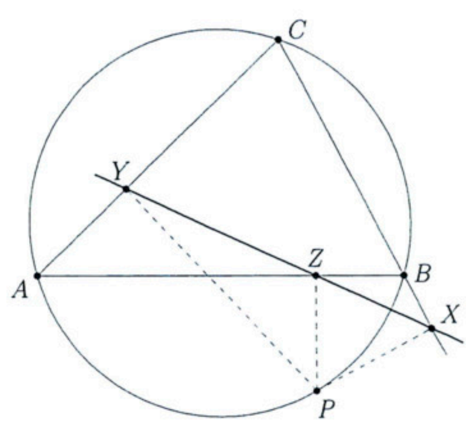

Figura 0.32: *Recta de Simson*

GE 23 (Problema de Fagnano). Demostreu que el mínim perímetre d'un triangle inscrit en un triangle acutangle donat és el del triangle òrtic (vegeu la figura 0.5).

GE 24. Trobeu el punt interior d'un triangle acutangle tal que la suma de les seves distàncies als vèrtexs sigui mínima (*punt de Fermat* del triangle).

GE 25. Demostreu que les circumferències circumscrites dels triangles equilàters construïts sobre els tres costats d'un triangle, al seu exterior, passen pel punt de Fermat. A més a més, els centres d'aquests tres triangles formen un altre triangle equilàter.

GE 26 (Teorema de Ptolemeu). En un quadrilàter convex la suma dels productes de les dues parelles de costats oposats és no inferior al producte de les dues diagonals, i la igualtat val si i només si el quadrilàter és inscriptible.

GE 27. Sigui ABC un triangle isòsceles amb BC com a costat desigual. Sigui Q el peu de l'altura pel vèrtex B i P el peu de la perpendicular a BC per Q. Trobeu l'àrea del triangle en funció de $x = BP$ i $y = PC$.

GE 28. En un triangle ABC escollim punts X, Y i Z sobre els costats BC, CA i AB, respectivament. Considerem les rectes per X, Y i Z que són perpendiculars a BC, CA i AB, respectivament. Proveu que les tres rectes són concurrents si i només si $AZ^2+BX^2+CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$.

GE 29. Sigui O el centre d'una circumferència K, AB un diàmetre, t la recta tangent a K en el punt B. Donat un punt P de K diferent de A i B, siguin C i D els punts d'intersecció amb t de la tangent a K pel punt P i de la recta AP. Proveu que $BC = CD$.

GE 30. Trobeu l'àrea d'un octògon convex inscrit en una circumferència sabent que té quatre costats consecutius de longitud 2 i els altres quatre de longitud 3.

GE 31. Siguin P i O punts fixos. Trobeu el lloc geomètric del simètric de P respecte d'una recta variable per O.

GE 32. Sigui H l'ortocentre d'un triangle, P el peu d'una altura i Q el punt d'intersecció de la semirecta HP amb el cercle circumscrit. Demostreu que $HP = PQ$.

GE 33. Proveu que el baricentre d'un triangle ABC és el punt G del segment HO tal que $GO = \frac{1}{2}GH$ i que el punt mitjà de HO és el centre de la circumferència circumscrita en el triangle $A'B'C'$ els vèrtexs del qual són els punts mitjans dels costats de ABC (la recta HO s'anomena *recta d'Euler* del triangle ABC; vegeu la figura 0.33).

GE 34. Si la recta d'Euler d'un triangle passa per un dels vèrtexs, el triangle és rectangle o isòsceles.

GE 35. Amb les notacions de la figura 0.31, sigui P' el punt de l'arc $A'P$ del cercle d'Euler tal que $\operatorname{arc}(A'P') = \frac{1}{3}\operatorname{arc}(A'P)$. Definim Q' i R' de manera similar. Demostreu que llavors el triangle $P'Q'R'$ és equilàter (figura 0.44).

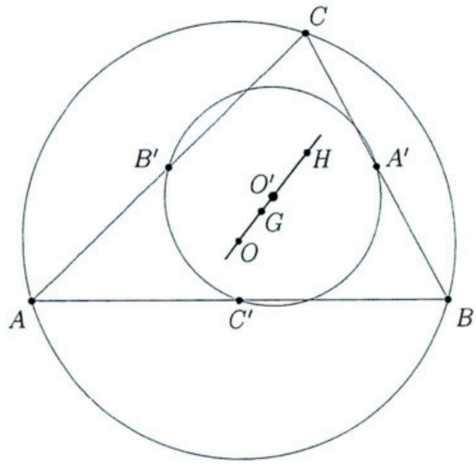

Figura 0.33: *Recta d'Euler*

GE36. Siguin A i B dos punts no diametralment oposats d'un cercle C donat i sigui XY un diàmetre variable de C. Determineu el lloc geomètric del punt d'intersecció de les rectes AX i BY.

GE37 (Erdös–Mordell). Sigui E un punt a l'interior d'un triangle ABC, s la suma de les distàncies de E als vèrtexs i t la suma de les distàncies de E als peus de les rectes per E perpendiculars als costats. Demostreu que $s \geqslant 2t$.

GE38. Sigui E un punt interior d'un triangle ABC. Siguin x, y i z les distàncies de E als vèrtexs A, B i C, respectivament, i p, q i r les distàncies de E als costats BC, CA i AB, respectivament. Llavors,

$$xyz \geqslant (p+q)(p+r)(q+r).$$

GE39. Siguin S i K circumferències diferents. Demostreu que K és doble per la inversió respecte de S si i només si K i S són ortogonals.

GE40. A la figura 0.34, l'arc AB és un quadrant de la circumferència de centre O i radi $|OA| = 1$, i AC és l'arc que correspon a la circumferència de radi 2 amb centre en el punt simètric de A respecte del punt O. Comproveu que K i K' són circumferències inverses respecte de la circumferència S de centre A i radi 1. Si P' és l'invers de A respecte de K', proveu que P' i el centre P de K són inversos respecte de S. Trobeu també la posició del centre Q de K' (i noteu que Q i P' són diferents).

GE41. Siguin P i A dos punts diferents donats i O un punt variable en una semirecta σ d'origen A donada. Sigui S la circumferència de centre O i radi $|OA|$ i P' l'invers de P

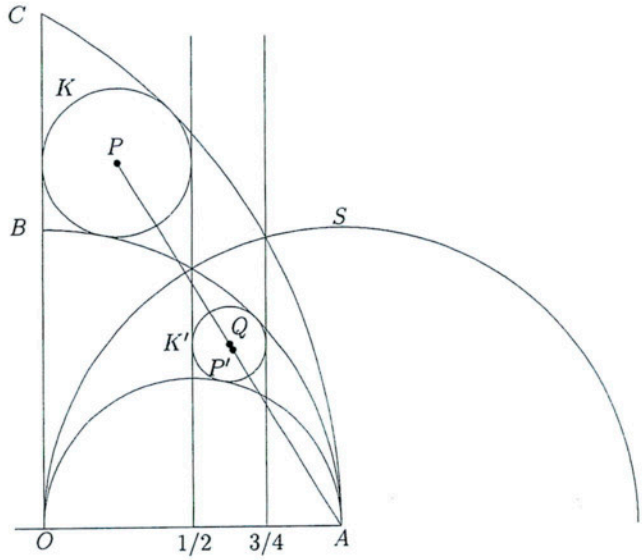

Figura 0.34: *Una aplicació de les inversions*

respecte de S. Sigui L la recta perpendicular a σ pel punt A. Demostreu que el límit de P' quan O s'allunya indefinidament de A és el punt simètric de P respecte de la recta L (si mirem L com el límit de S quan O s'allunya indefinidament de A, veiem que podem considerar la simetria respecte de L com el límit de la inversió respecte de S).

GE 42. Sigui S una circumferència de centre O, i P i P' dos punts no pertanyents a S i diferents de O. Demostreu que les condicions següents són equivalents:

1) P i P' són inversos respecte de S.

2) P i P' estan alineats amb O i existeix una circumferència K ortogonal a S que passa per P i P'.

3) Existeixen dues circumferències distintes K i K' que passen per P i P' i són ortogonals a S.

GE 43. Sigui S una circumferència de centre O, L una recta que no passa per O i $C = L'$ la circumferència inversa de L respecte de S. Demostreu que si P i Q són punts simètrics respecte de L, llavors els inversos P' i Q' de P i Q respecte de S són inversos respecte de C (és a dir, la simetria respecte de L i la inversió respecte de C es corresponen per la inversió respecte de S).

GE 44. Considerem la figura 0.35, en la qual C i C' són dues circumferències tangents del mateix radi R. La recta L és una tangent comuna a C i C' i les circumferències C'_n $(n \geqslant 1)$

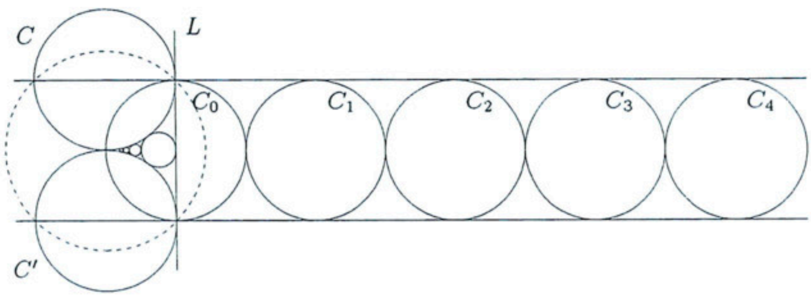

Figura 0.35: *Càlcul del diàmetre de les circumferències entre L, C i C'*

es determinen de manera que estiguin contingudes a la regió entre L, C i C' i que C'_n sigui tangent a C'_{n-1}, C i C' (convenim que $C'_0 = L$). Comproveu que C'_n és la inversa de C_n respecte de la circumferència puntejada i useu aquest fet per demostrar que el diàmetre de C'_n és igual a $R/n(n+1)$ (la circumferència puntejada és la que passa pels punts de contacte de L amb C i C' i que té per centre el punt de contacte de C i C').

GE45. A la figura 0.36, la circumferència C' és interior, i tangent en el punt B, a la circumferència C i les circumferències $C_0, C_1, ...$ es construeixen tal com indica la figura. Proveu que el diàmetre de C_n ($n \geqslant 1$) és igual a y_n/n, on y_n és la distància del centre de C_n a la recta AB (indicació: trobeu les inverses de $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n$ respecte de la circumferència de centre B que és ortogonal a C_n).

4 La Raquel i en Pau resolen problemes

En aquesta secció donem les solucions, en forma dialogada, de cinc problemes de la llista (GE6, GE16, GE17, GE23 i GE35). Ens hem decidit a emprar aquest mitjà perquè ens ha semblat adient per intentar explicar, a més a més de la solució, algunes idees i processos que ens semblen rellevants per a la resolució de problemes de geometria. Les solucions convencionals dels mateixos problemes, que són les que, en definitiva, s'exigeixen, les podeu trobar a la secció 5.

Als diàlegs, en Pau i la Raquel són estudiants dedicats a la tasca d'aprendre a resoldre problemes de geometria. A l'aula de ciència-ficció on treballen, l'Ariadna, una terminal de darreríssima generació, segueix atentament els seus passos. Ocasionalment, quan ho creu oportú, fa que l'Euclides, un dels seus mòduls més avançats, ajudi els estudiants a retrobar el fil de les seves disquisicions. Per a aprofitar de manera òptima les cavil·lacions de l'Euclides, convé remarcar que té dos modes de funcionament. Un, que podem qualificar de *declaratiu*, imita el procés de «síntesi» dels antics grecs, és a dir, enuncia conclusions que

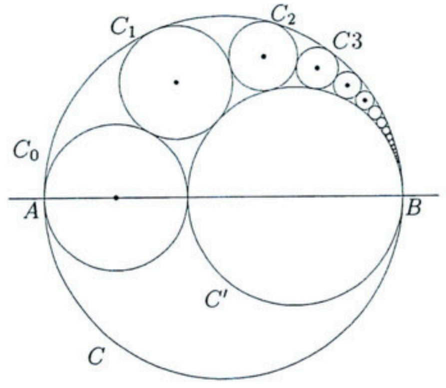

Figura 0.36: *Quin diàmetre té C_n?*

s'obtenen directament de les proposicions generades fins al moment mitjançant coneixements establerts (i generalment coneguts). L'altre, que podem qualificar d'*interrogatiu*, imita el procés d'«anàlisi» en el sentit dels antics, és a dir, fa *preguntes clau* amb les quals usualment es redueixen a un curt nombre els coneixements que cal posar en joc per intentar aconseguir l'objectiu del problema. Com veurem, els estudiants aprenen ràpidament les tècniques de resolució de problemes, i progressivament l'ajut que necessiten de l'Euclides es fa més esporàdic i considerablement més sofisticat.

Problema GE6

Després de llegir l'enunciat, en Pau i la Raquel dibuixen la figura 0.37. *Recorden molt bé que a l'inici de les classes el professor els va dir que, quan es tracta de resoldre problemes de geometria, un dibuix pot ésser decisiu. Amb tot això, però, és el primer problema, estan una mica cohibits i no saben ben bé com començar. Veient la situació, l'Ariadna sol·licita a l'Euclides que els ajudi.*

Euclides: El quadrilàter $PQUT$ és un paral·lelogram.

Raquel: Té raó, la diagonal QS és paral·lela al costat PT i la diagonal TR és paral·lela al costat PQ.

Euclides: El quadrilàter $PQUT$ és un rombe.

Pau: És clar, $PT = PQ$ perquè el pentàgon és regular.

Euclides: Així $QU = PT$.

Raquel: Obvi.

Euclides: Per tant, $QS - PT = QS - QU = US$.

P. i R.: Evident.

Euclides: Els triangles QTU i RUS són semblants.

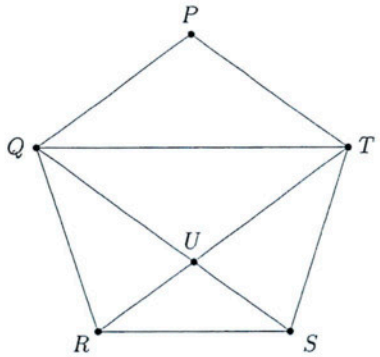

Figura 0.37: *El pentàgon i la raó àuria*

Raquel: Ja ho veig, podem aplicar el criteri AAA de semblança.

Pau: El que diu que dos triangles són semblants quan tenen els tres angles iguals?

Raquel: Sí, si no ho recordo malament.

L'Euclides ha aprofitat aquests instants per acabar la seva tasca i descarrega dues línies de símbols:

Euclides: Per tant $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$. I com que $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS-PT}$, pel que ja hem vist, obtenim que $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$.

Passen els moments i L'Euclides ja no diu res més.

R. i P.: I...?

Euclides: Què volíeu demostrar?

Pau: Que el costat del pentàgon regular és segment auri de la diagonal.

Euclides: I això què vol dir?

Raquel: Segons la definició, que si a és la diagonal i x el costat, llavors $a/x = x/(a-x)$.

Euclides: I fins on hem arribat en mode directe?

L'Euclides diu «mode directe» al que nosaltres n'hem dit «declaratiu», i diu «mode invers» al que n'hem dit «interrogatiu», això és, el que ha emprat després de «I...?»

Pau: Fins a la relació $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$.

R. i P.: Ah, ja ho veiem! Efectivament s'ha establert que el costat PT és segment auri de la diagonal QS, i això acaba la prova!

Problema GE16

Ariadna també soHicita l'ajuda de l'Euclides, que comença en mode interrogatiu.

Euclides: Quina mena de coses us demanen?

Pau: No entenc què vol dir.

Raquel: Jo crec que ho sé: hem de demostrar que es compleixen unes certes desigualtats.

Euclides: Magnífic. Desigualtats..., entre què?

Pau: Entre distàncies.

Euclides: ExceHent. I de què disposeu per demostrar desigualtats entre distàncies?

Pau: Jo només conec la desigualtat triangular.

Euclides: Pots enunciar-la?

Pau: Sí: en un triangle, tot costat és inferior a la suma dels altres dos.

Euclides: I com podríem intentar aplicar-la a les desigualtats que ens demanen?

En Pau i la Raquel pensen un moment. No saben ben bé què dir. L'Euclides hi intervé, en mode declaratiu, per facilitar-los la tasca.

Euclides: El problema demana dues desigualtats; en realitat estem en presència de dos problemes.

Raquel: Hauríem de fer un dibuix.

Amb un no res dibuixen la figura 0.38.a.

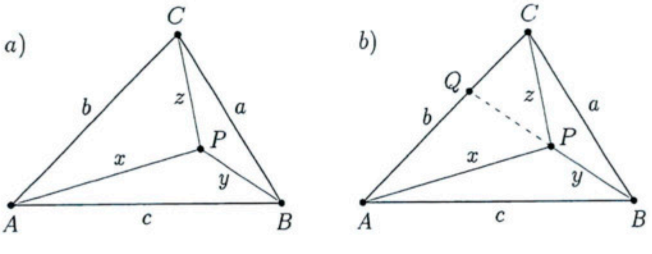

Figura 0.38: *Figures usades per resoldre el problema 16*

Raquel: Si posem $2p$ per denotar el perímetre de ABC, hem de veure, d'una banda, que $p < x + y + z$, i, de l'altra, que $x + y + z < 2p$.

Euclides: Us faré una pregunta més explícita que l'anterior: com podeu usar la desigualtat triangular per establir $p < x + y + z$?

Pau: Hauríem de cercar triangles, a la figura 0.38.a, en els que un costat estés relacionat amb el perímetre i els altres dos amb els segments x, y i z.

Raquel: Els triangles PAB, PBC i PCA, per exemple?

Pau: Sí, per exemple. La desigualtat triangular, aplicada a PAB, ens dóna $c < x + y$.

Raquel: I aplicada als altres dos ens dóna, anàlogament, $a < y + z$ i $b < z + x$.

Pau: Sumant les tres desigualtats tenim $a + b + c < 2x + 2y + 2z$.

Raquel: I com que $a + b + c = 2p$, en resulta que $p < x + y + z$, com volíem demostrar.

Euclides: Heu demostrat una part del problema 16.

Pau: L'atra part era la desigualtat $x + y + z < 2p$.

Raquel: Si intentem de prosseguir l'anàlisi de l'Euclides, ara ens hauríem de preguntar com podem usar la desigualtat triangular per establir $x + y + z < 2p$.

Pau: Com en el cas anterior, hauríem de cercar triangles en els quals, a la inversa d'abans, un costat estigui relacionat amb els segments x, y i z, i els altres dos, amb el perímetre.

Miren la figura 0.38.*a i no aconsegueixen veure cap triangle que compleixi el que volen. Per un moment no saben què fer. Tot d'una, però, la Raquel té un idea; li sembla bona i això l'empeny a explicar les seves conseqüències sense pausa:*

Raquel: No ens cal la desigualtat triangular: és evident que $x + y < b + a$; anàlogament, $y + z < c + b$ i $z + x < a + c$; sumant, $2x + 2y + 2z < 2a + 2b + 2c$, és a dir, $x + y + z < 2p$. I ja està, hem acabat!

Pau: Això ha estat brillant, Raquel. Però... com veus que $x + y < a + b$?

Raquel: Hum!

Pau: Com que és una desigualtat entre distàncies, potser el que hem d'intentar és provar-la aplicant de nou la desigualtat triangular.

Raquel: Tens raó; ja ens hem convençut que és l'única eina que coneixem per intentar resoldre aquesta mena de qüestions.

En Pau completa la figura 0.38.*a fins a obtenir la figura* 0.38.*b.*

Pau: Crec que ja ho tenim. Fixa-t'hi: $x < AQ + QP$, per la desigulatat triangular; per tant $x + y < AQ + QP + y = AQ + QB$; ara $QB < QC + CB$, altra cop per la desigualtat triangular, d'on $AQ + QB < AQ + QC + CB = AC + CB = b + a$. Per tant, $x + y < b + a$.

Raquel: Efectivament. I així sí que la demostració és completa!

Problema GE17

Abans de passar a intentar resoldre el problema 17, *en Pau i la Raquel llegeixen el seu enunciat amb molta cura i dibuixen la figura* 0.39.*a.*

Pau: Em pregunto si el problema anterior, aplicat al baricentre G, ens donaria alguna cosa.

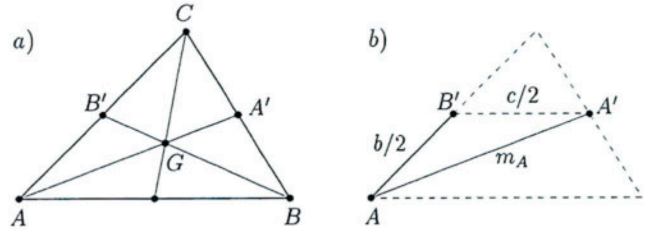

Figura 0.39: *Figures usades per resoldre el problema 17*

Raquel: Podem provar-ho. Només ens caldria saber el valor de $x+y+z$ [amb les notations del problema anterior i amb $P = G$] en termes de μ [la suma de les tres mitjanes].

Pau: Això és fàcil. Sabem que $AG = \frac{2}{3}AA'$, on A' és el punt mitjà de BC. En altres paraules, $x = \frac{2}{3}m_A$, on m_A és la mitjana corresponent al vèrtex A. Per tant $x + y + z = \frac{2}{3}\mu$.

Raquel: I com que $p < x + y + z$ (pel problema 16), resulta que $p < \frac{2}{3}\mu$.

Pau: Que és equivalent a $\frac{3}{2}p < \mu$, la primera de les relacions que volem demostrar. Què passarà amb la segona?

Raquel: Si apliquem la segona desigualtat del problema anterior, obtenim $\frac{2}{3}\mu < 2p$.

Pau: Però el que volem és $\mu < 2p$. I $\mu < 2p$ és més forta que $\frac{2}{3}\mu < 2p$.

Raquel: Perquè $\frac{2}{3}\mu < \mu$, oi? Què hi farem! Haurem d'investigar una altra via.

Pau: Podem intentar aplicar la desigualtat triangular una altra vegada.

Raquel: Bona idea! Pel que hem après fins ara, ens cal trobar triangles amb un costat relacionat amb μ, i els altres dos, amb el perímetre.

Pensen una mica. Al final dibuixen la figura 0.39.*b*.

Pau: Com que $A'B' = c/2$, el triangle $AA'B'$ té un costat, AA', que és la mitjana m_A, mentre que els altres dos costats són iguals a $c/2$ i $b/2$.

Raquel: *Ergo*, $m_A < c/2 + b/2$. Anàlogament tenim $m_B < a/2 + c/2$ i $m_C < b/2 + a/2$.

Pau: I sumant, $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$.

La Raquel i en Pau es disposen a celebrar l'èxit. Encara no han tingut temps de començar, quan l'Euclides pregunta:

Euclides: Creieu que les desigualtats obtingudes son òptimes?

L'interès amb què reben aquesta qüestió no els priva de prendre's un descans.

Consignem aquí només que quan van tornar a la qüestió es van adonar de les coses següents. Al problema 16, si fem $P = C$, llavors $x + y + z = a + b + 0$. Per tant, si fem que

c sigui cada vegada més petit, llavors $2p = a + b + c$ tendeix a $a + b = x + y + z$, i per tant la desigualtat $x + y + z < 2p$ no es pot millorar. Per altra banda, si fem $P = A$ i fem tendir c a 0, llavors $x + y + z = 0 + a + c$ tendeix a a i $p = (a + b + c)/2$ tendeix a $(2a)/2 = a$, amb la qual cosa es veu que la desigualtat $p < x + y + z$ tampoc no es pot millorar. Pel que fa al problema 17, es van adonar, considerant un triangle amb c cada vegada més petit, que la desigualtat $\mu < 2p$ no es pot millorar, i considerant un triangle en el que C tendeix al punt mitjà de AB, que tampoc no es pot millorar la desigualtat $\frac{3}{2}p < \mu$.

Problema GE23

Euclides: Què ens demanen?

Raquel: Demostrar que el triangle òrtic d'un triangle donat és el que té el perímetre més petit entre tots els triangles inscrits al primer.

Pau: És a dir, es tracta de veure que una certa longitud és mínima entre les que satisfan unes certes condicions.

Euclides: Quins enunciats coneixeu que permetin concloure que una longitud és mínima?

Raquel: Jo només conec que entre totes les corbes que uneixen dos punts, la recta és la que té longitud menor.

Euclides: Podríem usar aquest coneixement per determinar si un triangle inscrit té perímetre mínim?

Pau: No ho veig pas fàcil, ja que el triangle és una línia tancada.

Fan una pausa per dibuixar la figura 0.40.*a*.

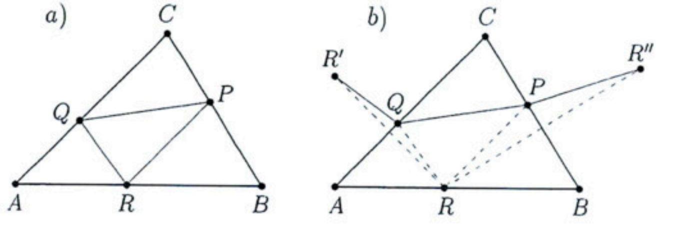

Figura 0.40: *Resolució del problema de Fagnano*

Raquel: Potser podríem obrir-lo [el triangle PQR]; obrir-lo d'alguna manera que ens fos útil.

Pau: Genial! Potser una manera d'aconseguir-ho sigui canviar els costats QR i PR pels seus simètrics QR' i QR'' respecte dels costats AC i BC.

Raquel: Vegem quin aspecte tindria fent una figura.

Dibuixen la figura 0.40.*b*.

Raquel: La línia $R'QPR''$ té, doncs, la mateixa longitud que el perímetre del triangle inscrit PQR.

Pau: Sí, és clar; per les propietats de les simetries sabem que $R'Q = RQ$ i $R''P = RP$.

Raquel: A més a més, R' i R'' no depenen en absolut de P i Q; només depenen de la posició de R.

Pau: Ja veig com usar la propietat de la línia recta!

En Pau dibuixa la figura 0.41.*a*, *mentre explica:*

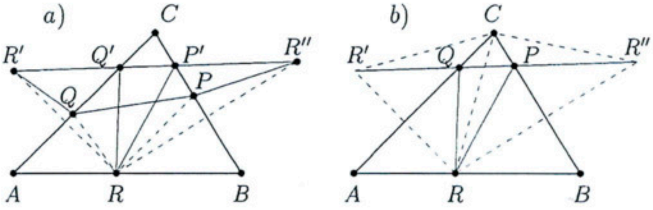

Figura 0.41: *Resolució del problema de Fagnano (continuació)*

Pau: Si considerem el segment $R'R''$, i aquest talla els segments AC i BC en els punts Q' i P', llavors $R'R''$ és el perímetre del triangle $P'Q'R$. I com que $R'R''$ és més curt que $R'QPR''$ (o igual, si per casualitat fos $Q' = Q$ i $P' = P$), el triangle $P'Q'R$ té el perímetre més petit (o igual) que PQR. De fet, és el de perímetre més petit sempre que mantinguem R fix.

Raquel: Ara hauríem de veure, doncs, per quin punt R el segment $R'R''$ té longitud mínima, ja que llavors el triangle $P'Q'R$ serà la solució del problema.

En Pau i la Raquel romanen en silenci. No veuen què poden fer. Han arribat fins aquí ajudats per l'Euclides en mode invers. Perquè puguin seguir, l'Euclides canvia súbitament a mode directe.

Euclides: El triangle $CR'R''$ és isòsceles.

Raquel: Per què?

Euclides: $CR' = CR = CR''$ per les propietats de la simetries.

Per poder seguir, dibuixen la figura 0.41.*b*. *Decideixen oblidar-se dels punts P i Q del triangle inscrit inicial i usar les lletres P i Q per designar els punts que abans eren P' i Q'.*

Pau: De fet, doncs, $CR'R$ i CRR'' també són isòsceles.

Raquel: A més, CA i CB són les altures dels dos darrers triangles respecte del vèrtex C.

Pau: En resulta que l'angle $\widehat{R'CR''}$ és el doble de l'angle $\widehat{ACB}$. Com que aquest darrer és fix, $\widehat{R'CR''}$ també és fix; vull dir que no depèn de R.

Raquel: Tenim un triangle isòsceles, $R'CR''$, volem minimitzar la seva base $R'R''$, i sabem que l'angle oposat a la base és constant.

Pau: Sota aquestes condicions, la base serà mínima quan els costats (que són iguals) siguin mínims.

Raquel: Com que els costats són iguals a CR, la base $R'R''$ serà mínima quan el segment CR ho sigui.

Pau: Fantàstic! CR és mínim quan R és el peu de l'altura respecte del vèrtex C!

Raquel: Per tant, el triangle inscrit de perímetre mínim és tal que R és el peu de l'altura i P i Q es construeixen com ja s'ha indicat.

Pau: Com que el paper de R en les consideracions anteriors el podrien haver fet P o Q, realment P i Q també són els peus de les corresponents altures.

Raquel: De fet, hem demostrat, doncs, que el el triangle inscrit de perímetre mínim és el triangle òrtic, i que els simètrics d'un vèrtex del triangle òrtic respecte dels dos costats que no el contenen estan alineats amb els altres dos vèrtexs (del triangle òrtic).

Pau: És ben curiós!

Mentre celebren alegrament aquestes excel·lents conclusions...

Euclides: On heu usat la hipòtesi que el triangle és acutangle? És, aquesta hipòtesi, indispensable? Podríeu usar la vostra conclusió per resoldre el problema 19?

Problema GE35

La Raquel i en Pau recorden que el cercle dels nou punts és el cercle $A'B'C'$, on A', B', C' són els punts mitjans dels costats, i que aquest cercle, també anomenat «d'Euler», passa pels peus P, Q, R de les altures i pels punts mitjans A'', B'', C'' dels segments HA, HB, HC. També recorden, pel que han vist en problemes anteriors, que l'homotècia de centre G, el baricentre, transforma el cercle circumscrit ABC en $A'B'C'$. Abans de decidir què fer, dibuixen la figura 0.42 (s'ho arrangen de manera que $\widehat{A} \geqslant \widehat{B} \geqslant \widehat{C}$). D'acord amb l'enunciat, el punt P' de l'arc $A'P$ es defineix de manera que l'arc $A'P' = \frac{1}{3}A'P$; i els punts Q' i R' es defineixen de manera similar.

Raquel: Volem veure que $P'Q'R'$ és un triangle equilàter.

Pau: Segur que aquí l'Euclides preguntaria: Com podem veure que un triangle és equilàter?

Raquel: Una manera de fer-ho és aplicar la definició: un triangle és equilàter quan els seus tres costats són iguals. També n'hi ha prou veient que els seus tres angles són iguals (necessàriament d'amplitud $\pi/3$). El que encara no veig és com aplicar algun d'aquests criteris al problema.

Pau: Atès que $P'Q'R'$ estan sobre el cercle d'Euler, potser el segon criteri aniria millor.

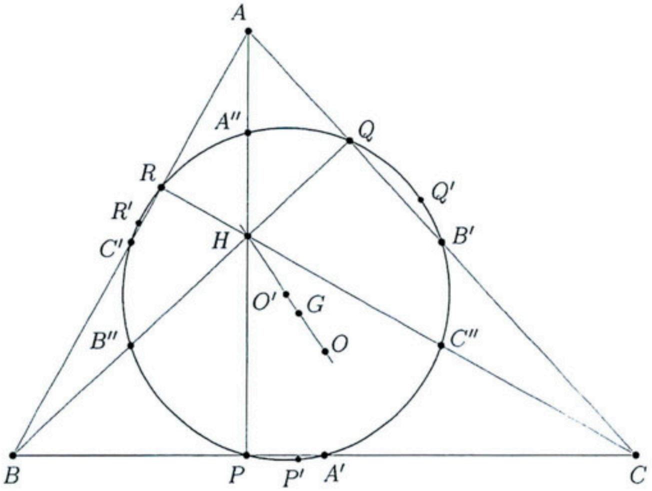

Figura 0.42: *Punts P', Q', R' del cercle d'Euler*

Raquel: A mi també m'ho sembla. Hauríem de veure que, en el triangle $P'Q'R'$, els angles $\widehat{P'}$, $\widehat{Q'}$ i $\widehat{P'}$ tenen amplitud $\pi/3$.

Pau: Com que aquests angles estan inscrits al cercle d'Euler, això és equivalent a dir que els arcs $P'Q'$, $Q'R'$ i $R'P'$ sobre el cercle d'Euler tenen una amplitud de $2\pi/3$ radians.

Raquel: Potser no serà tan difícil com podia semblar. Sobre el cercle d'Euler hi tenim ara 12 punts i potser ens aniria bé, abans de seguir, de deduir les amplituds d'alguns dels arcs entre aquests punts.

Pau: Em sembla bé. Els arcs $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$, per exemple, són fàcils: les seves amplituds son les mateixes que les dels arcs AB, BC i CA sobre el cercle circumscrit ABC, és a dir, iguals a $2\widehat{C}$, $2\widehat{A}$ i $2\widehat{B}$.

Raquel: Suposo que la primera afirmació que fas prové de l'homotècia que transforma ABC en $A'B'C'$, i que la segona surt directament del que sabem d'angles inscrits.

Pau: Efectivament.

$$A'B' = 2\widehat{C}, \quad B'C' = 2\widehat{A}, \quad C'A' = 2\widehat{B}.$$

Ara ja no en veig cap més.

Raquel: Jo veig una relació que potser ens pot donar quelcom més. Fixa-t'hi [mentre ho diu, dibuxa la figura 0.43]: Com que A' és el punt mitjà de BC i C'' el punt mitjà de BH, resulta que $A'C''$ és parallela a l'altura BH.

Pau: Anàlogament $A'B''$ és parallela a l'altura CR, etc.

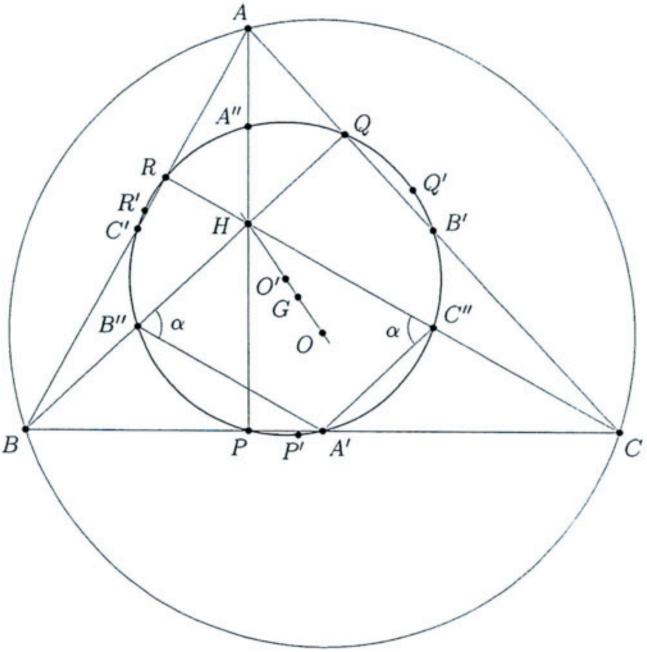

Figura 0.43: *Determinació d'angles centrals sobre el cercle d'Euler*

Raquel: I així $A'C''HB''$ és un paral·lelogram.

Pau: I tot això què té a veure amb els angles?

La Raquel posa la lletra α a l'angle $\widehat{A'C''H}$ i a l'angle $\widehat{HB''A'}$.

Raquel: Són iguals perquè són angles oposats en un paral·lelogram.

Pau: Ja ho veig. Per angles inscrits altra vegada, 2α és igual a l'arc $A'C'R$ i també a l'arc $A'B'Q$.

Raquel: Els costats $C''A'$ i $C''H$ de l'angle $\widehat{A'C''H}$ són perpendiculars, respectivament, als costats AC i AB. Per tant, de fet, $\alpha = \widehat{A}$.

Pau: Un gran pas: ara ja tenim que l'amplitud dels arcs $A'B'Q$ i $A'C'R$ és igual a $2\widehat{A}$.

Raquel: I per diferència [$B'Q = A'Q - A'B'$ i $C'R = A'R - A'C'$] obtenim que $B'Q = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}$ i $C'R = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}$. Anàlogament, serà $A'P = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}$. És a dir,

$$B'Q = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}, C'R = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}, A'P = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}.$$

Pau: Ara ja podem calcular l'arc $P'Q'$:

$$\begin{aligned} P'Q' &= \tfrac{1}{3}A'P + A'B' + \tfrac{1}{3}B'Q \\ &= \tfrac{2}{3}(\widehat{B} - \widehat{C}) + 2\widehat{C} + \tfrac{2}{3}(\widehat{A} - \widehat{C}) \\ &= \tfrac{2}{3}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= \tfrac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Que $Q'R' = \frac{2\pi}{3}$ i $R'P' = \frac{2\pi}{3}$, es veu de manera anàloga.

En Pau i la Raquel dibuixen la figura 0.44*, simplement per gaudir de veure amb imatges el que han vist abans amb els ulls de la geometria. Abans de tenir temps de tancar la teminal i els quaderns, l'Euclides té temps de generar una pregunta.*

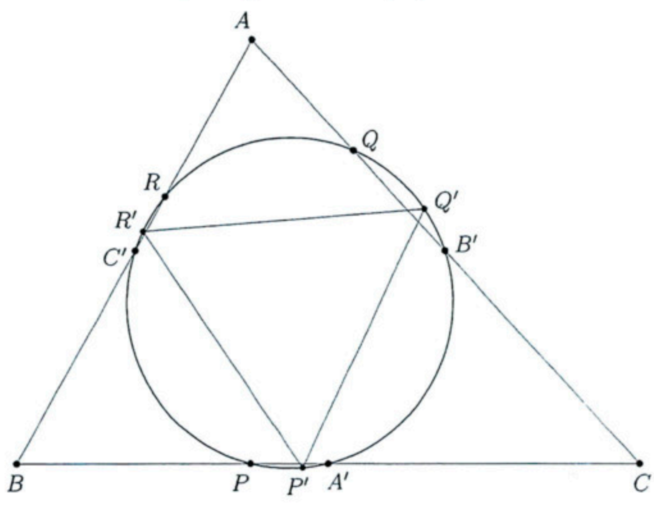

Figura 0.44: *El triangle equilàter $P'Q'R'$*

Euclides: Què en podeu dir de les tres parelles d'arcs $A'C''$ i $B'C''$, PB'' i $C'B''$, QA'' i RA''?

Podem transcriure breument que la Raquel i en Pau van veure ràpidament, usant que les altures són bisectrius del triangle òrtic, que $RA'' = QA''$ i, usant el treball fet en el darrer problema, que $RA'' = QA'' = \pi - 2\widehat{A}$. Anàlogament $PB'' = RB'' = \pi - 2\widehat{B}$ i $PC'' = QC'' = \pi - 2\widehat{C}$. Això, i de nou amb els resultats del primer problema, els permet veure que $B'C'' = C'B'' = \pi - 2\widehat{A}$ i $A'C'' = PB'' = \pi - 2\widehat{B}$.

5 Mostra de solucions

En aquesta secció s'inclouen solucions convencionals dels problemes GE6, GE16, GE17, GE23 i GE35. Aquestes mateixes solucions les podeu trobar exposades en forma dialogada a la secció 4, la qual cosa pot tenir interès pels lectors que vulguin reflexionar amb més deteniment sobre el procés de resolució de problemes.

Problema GE6

Considerem la figura 0.37 (pàg. 191). El quadrilàter $PQUT$ és un rombe, ja que la diagonal QS és paral·lela al costat PT, la diagonal TR és paral·lela al costat PQ i $PT = PQ$ (perquè el pentàgon és regular). Així $QU = PT$, d'on resulta que $QS - PT = QS - QU = US$.

Per altra banda, els triangles QTU i RUS són semblants (criteri AAA de semblança). Per tant $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$. I com que $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS-PT}$, pel que ja hem vist, obtenim que $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$. Per tant, el costat PT és segment auri de la diagonal QS, per la definició de segment auri.

Problema GE16

Com que ens demanen que demostrem dues desigualtats entre distàncies, intentarem aplicar la desigualtat triangular. Amb les notacions de la figura 0.38.a, si posem $2p$ per denotar el perímetre de ABC, hem de veure, d'una banda, que $p < x + y + z$, i, de l'altra, que $x + y + z < 2p$.

Per establir que $p < x+y+z$, fixem-nos en els triangles PAB, PBC i PCA. La desigualtat triangular, aplicada a PAB, ens dóna $c < x+y$. Anàlogament, $a < y+z$ i $b < z+x$. Sumant les tres desigualtats tenim $a + b + c < 2x + 2y + 2z$. Com que $a + b + c = 2p$, en resulta que $p < x + y + z$.

Manca veure la desigualtat $x + y + z < 2p$. Considerem la figura 0.38.b. Aplicant la desigualtat triangular obtenim: $x + y < AQ + QP + y = AQ + QB < AQ + QC + CB = AC+CB = b+a$. Anàlogament, $y+z < c+b$ i $z+x < a+c$; sumant, $2x+2y+2z < 2a+2b+2c$, és a dir, $x + y + z < 2p$.

Problema GE17

El problema 16, aplicat al baricentre G, ens dóna la primera desigualtat. En efecte, amb les notacions de la figura 0.39.a, sabem que $AG = \frac{2}{3}AA'$, on A' és el punt mitjà de BC. En altres paraules, $x = \frac{2}{3}m_A$, on m_A és la mitjana corresponent al vèrtex A. Per tant $x + y + z = \frac{2}{3}\mu$. Com que $p < x + y + z$ (pel problema 16), resulta que $p < \frac{2}{3}\mu$, que és equivalent a $\frac{3}{2}p < \mu$. Val a remarcar que si apliquem la segona desigualtat del problema 16, obtenim $\frac{2}{3}\mu < 2p$, que és una desigualtat més feble que la desigualtat $\mu < 2p$ que volem demostrar.

Per veure que $\mu < 2p$, considerem la figura 0.39.b. Com que $A'B' = c/2$, el triangle $AA'B'$ té un costat, AA', que és la mitjana m_A, mentre que els altres dos costats són iguals a $c/2$ i $b/2$. Per tant, $m_A < c/2 + b/2$. Anàlogament, tenim $m_B < a/2 + c/2$ i $m_C < b/2 + a/2$. Si ara sumem aquestes tres desigualtats, obtenim $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$.

Problema GE23

Considerem la figura 0.40.a. Volem veure que PQR té perímetre mínim si i només si PQR és el triangle òrtic de ABC. Siguin R' i R'' els simètrics del punt R respecte dels costats AC i BC, respectivament (figura 0.40.b). La línia $R'QPR''$ té la mateixa longitud que el perímetre del triangle inscrit PQR. Si considerem els punts d'intersecció, Q' i P', de $R'R''$ amb els costats AC i BC, respectivament (figura 0.41.a), llavors el perímetre de $P'Q'R$ és igual a $R'R''$. Com que la longitud de $R'R''$ és inferior (o igual) a la longitud de la línia

$R'QPR''$, veiem que el triangle $P'Q'R$ és el de perímetre més petit entre tots els triangles inscrits PQR (amb R fix). Ara ens cal veure per quin punt R del costat AB té el segment $R'R''$ longitud mínima, ja que llavors el triangle $P'Q'R$ serà la solució del problema.

Remarquem que el triangle $CR'R''$ és isòsceles ($CR' = CR = CR''$ per les propietats de la simetries; vegeu la figura 0.41.*b*). De fet, $CR'R$ i CRR'' també són isòsceles i CA i CB són són perpendiculars a RR' i RR''. En resulta que l'angle $\widehat{R'CR''}$ és el doble de l'angle $\widehat{ACB}$. Com que aquest darrer és fix, $\widehat{R'CR''}$ també és fix (és a dir, no depèn de R). Per tant la base $R'R''$ del triangle isòsceles $R'CR''$ té longitud mínima si i només si els seus costats tenen longitud mínima. Però com que els costats són iguals a CR, la base $R'R''$ serà mínima quan el segment CR ho sigui, és a dir, si i només si R és el peu de l'altura del vèrtex C. Anàlogament, es veuria que P i Q han de ser els peus de les altures de A i B, respectivament.

Problema GE35

Recordem que el cercle dels nou punts és el cercle $A'B'C'$, on A', B', C' són els punts mitjans dels costats, i que aquest cercle, també anomenat *d'Euler*, passa pels peus P, Q, R de les altures i pels punts mitjans A'', B'', C'' dels segments HA, HB, HC. Recordem també, pel que hem vist en problemes anteriors, que l'homotècia de centre G (el baricentre), transforma el cercle circumscrit ABC en $A'B'C'$.

Considerem la figura 0.42 (suposarem que $\widehat{A} \geqslant \widehat{B} \geqslant \widehat{C}$). D'acord amb l'enunciat, el punt P' de l'arc $A'P$ es defineix de manera que l'arc $\mathrm{arc}(A'P') = \frac{1}{3}\mathrm{arc}(A'P)$; i els punts Q' i R' es defineixen de manera similar. Volem veure que $P'Q'R'$ és un triangle equilàter, per la qual cosa és suficient veure que els angles $\widehat{P'}$ $\widehat{Q'}$ i $\widehat{P'}$ (del triangle $P'Q'R'$) tenen amplitud $\pi/3$. Com que aquests angles estan inscrits al cercle d'Euler, això és equivalent a dir que els arcs $P'Q'$, $Q'R'$ i $R'P'$ sobre el cercle d'Euler tenen una amplitud de $2\pi/3$ radians.

Les amplituds dels arcs $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$ coincideixen amb les dels arcs AB, BC i CA sobre el cercle circumscrit ABC, és a dir, són iguals a $2\widehat{C}$, $2\widehat{A}$ i $2\widehat{B}$ (per l'homotècia que transforma ABC en $A'B'C'$ i per les propietats dels angles inscrits al cercle ABC). Per tant,

$$\mathrm{arc}(A'B') = 2\widehat{C}, \mathrm{arc}(B'C') = 2\widehat{A}, \mathrm{arc}(C'A') = 2\widehat{B}.$$

Considerem ara la figura 0.43. Com que A' és el punt mitjà de BC i C'' el punt mitjà de BH, resulta que $A'C''$ és paral·lela a l'altura BH. Anàlogament, $B'A''$ és paral·lela a l'altura CH i $C'B''$ és paral·lela a l'altura AH. Per tant, $A'C''HB'$ és un paral·lelogram. Així obtenim que els angles $\widehat{A'C''H}$ i $\widehat{HB'A'}$ són iguals. Però, per angles inscrits altra vegada, 2α és igual a l'arc $A'C'R$ i també a l'arc $A'B'Q$. A més a més, els costats $C''A'$ i $C''H$ de l'angle $\widehat{A'C''H}$ són perpendiculars, respectivament, als costats AC i AB. Per tant, $\alpha = \widehat{A}$. Tenim, doncs, que l'amplitud dels arcs $A'B'Q$ i $A'C'R$ és igual a $2\widehat{A}$. Per diferència [$B'Q = A'Q - A'B'$ i $C'R = A'R - A'C'$] obtenim que $B'Q = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}$ i $C'R = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}$. Anàlogament serà $A'P = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}$. És a dir,

$$\mathrm{arc}(B'Q) = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}, \mathrm{arc}(C'R) = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}, \mathrm{arc}(A'P) = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}.$$

Ara ja podem calcular l'arc $P'Q'$:

$$\begin{aligned}\mathrm{arc}(P'Q') &= \tfrac{1}{3}\mathrm{arc}(A'P) + \mathrm{arc}(A'B') + \tfrac{1}{3}\mathrm{arc}(B'Q)\\ &= \tfrac{2}{3}(\widehat{B} - \widehat{C}) + 2\widehat{C} + \tfrac{2}{3}(\widehat{A} - \widehat{C})\\ &= \tfrac{2}{3}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})\\ &= \tfrac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

Que $\mathrm{arc}(Q'R') = \frac{2\pi}{3}$ i $\mathrm{arc}(R'P') = \frac{2\pi}{3}$, es veuen de manera anàloga.

6 Referències

H. S. M. Coxeter, Fundamentos de Geometría. Limusa.

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Geometry revisited, The Mathematical Association of America, 1967 (sexta edició).

H. Eves, A survey of geometry, Allyn and Bacon.

R. A. Johnson, Advanced Eucledian Geometry, Dover.

L. C. Larson, Problem-solving through problems, Springer-Verlag.

P. Puig Adam, Curso de Geometría métrica (Tomo I - Fundamentos). Gómez Puig Ediciones.

FORUM de problemes 93/94, Societat Catalana de Matemàtiques, IEC.